

Universität Bremen

Fachbereich Wirtschaftswissenschaften

Prof. Dr. Herbert Kopfer

Vertiefungskurs: „Heuristische Verfahren in der Logistik“

Referat:

„Anwendung von heuristischen Verfahren zur Berechnung optimaler Maschinenausnutzung in Industrieunternehmen“

Bremen, im Juli 1998

eingereicht von:

Tobias Sippl

10.12.1972

Matrikelnummer: 1262873

Osterdeich 55

28203 Bremen

Inhaltsverzeichnis

1. ALLGEMEINES	3
1.1 Einführung.....	3
1.2 Begriffe und Definitionen	4
1.3 Klassifikation.....	6
1.3.1 Maschinencharakteristika	6
1.3.2 Auftragscharakteristika.....	7
1.3.3 Zielsetzungen.....	8
2. ANWENDUNG DER HEURISTIKEN	9
2.1 Das Verfahren von Akers (1956)	9
2.2 Das Verfahren von Mensch.....	14
2.3 Der Johnson-Algorithmus (1954).....	17
2.4 Das Shifting Bottleneck- Verfahren	18
2.5 Verbesserungsverfahren.....	23
2.6 Branch & Bound Verfahren.....	24
2.7 Abschließende Beurteilung.....	44
LITERATURVERZEICHNIS.....	45

ANHANG

Anwendung von heuristischen Verfahren zur Berechnung optimaler Maschinenausnutzung in Industrieunternehmen

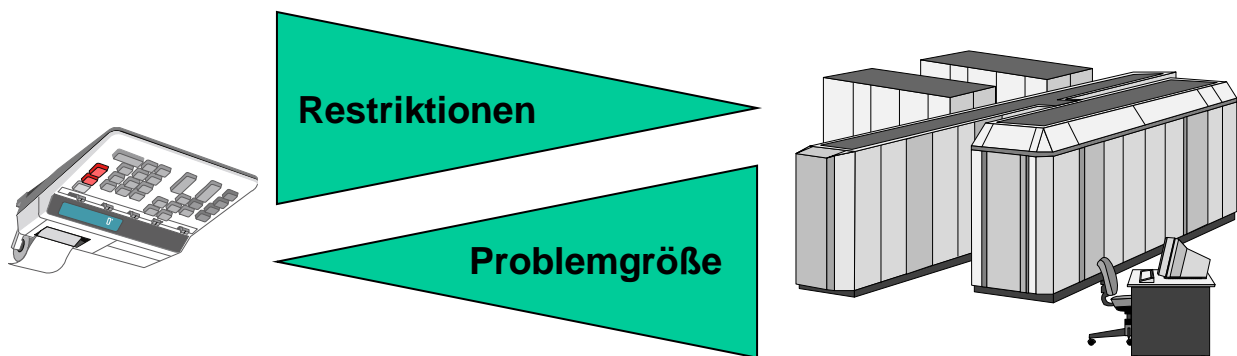
1. Allgemeines

1.1 Einführung

Die Probleme der Maschinenbelegungsplanung befassen sich mit der Zuordnung von Aufträgen zu Maschinen.

Vorgegebene Zielsetzungen werden in die Modellierung der Problemstellung mit einbezogen.

Durch geschickte Reduktion der Problemkomplexität aufgrund ausgewählter Restriktionen, kann der Rechenaufwand erheblich minimiert werden.



Zusammenhang zwischen Komplexität, Restriktionen und Rechenaufwand

Die in diesem Referat vorgestellten Verfahren können lediglich für Maschinenbelegungsprobleme geringer Komplexität als Hilfestellung dienen. Dafür wird bei diesen Verfahren eine sehr exakte Lösung des Problems angegeben.

1.2 Begriffe und Definitionen

Bei den betrachteten Problemen sind n Aufträge ($j = 1, \dots, n$) auf m Maschinen ($i = 1, \dots, m$) einzuplanen.

Im allgemeinen sind hierfür folgende Daten gegeben:

- Zum **Auftragsfreigabezeitpunkt** a_j steht der Auftrag j zur Bearbeitung bereit.
- f_j gibt den gewünschten **Fertigstellungstermin** des Auftrags j an.
- t_{ji} bezeichnet die **Bearbeitungszeit** von Auftrag j auf Maschine i .
- Ein Auftrag j besteht aus g_j verschiedenen **Arbeitsgängen** (A_{j1}, \dots, A_{jg}).

Eine häufig angewandte Vereinfachung geht von folgenden Sachverhalten aus:

- Gleiche Anzahl von Arbeitsgängen und Maschinen ($g=m$).
- Jedem Arbeitsgang läßt sich eindeutig eine Maschine zuordnen.

Mit dieser Vereinfachung läßt sich eine **Maschinenfolge** $\mu_j = (\mu_{j1}, \dots, \mu_{jg})$ für jeden Auftrag j angeben.

Gegenstand der Maschinenbelegungsplanung ist es, für jede Maschine i eine **Auftragsfolge** anzugeben. Diese Auftragsfolge wird in einem Ablaufplan (Abb. 3) dargestellt. Dabei sollen auf jeder einzelnen Maschine die Wartezeiten so gering wie möglich gehalten werden.

Beispiel eines technisch vorgegebenen Maschinenfolgegraphen für $m=n=3$. Die drei vorhandenen Maschinen sind für jeden Auftrag durch die grün gezeichneten Knoten dargestellt. Die Pfeile geben die Maschinenfolge der einzelnen Aufträge an.

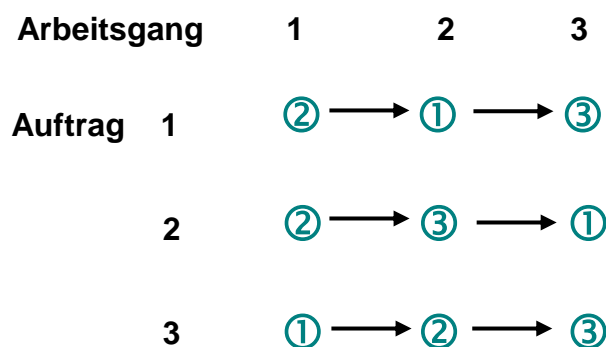


Abb. 1 Beispiel eines **Maschinenfolgegraphen** für $m = n = 3$

Aufgrund der gegebenen Bearbeitungszeiten (Abb. 2), ist es möglich für die einzelnen Arbeitsgänge die entsprechenden Vorlaufzeiten und Nachlaufzeiten zu berechnen.

	Maschine 1			Maschine 2			Maschine 3		
Arbeitsgang	A12	A23	A31	A11	A21	A32	A13	A22	A33
Vorlaufzeit	8	7	0	3	0	8	15	3	12
Bearbeitungszeit	4	4	4	5	3	4	2	4	3
Nachlaufzeit	2	0	7	6	8	3	0	4	0

Abb. 2 Bearbeitungszeiten der einzelnen Arbeitsgänge

Nach der Lösung des Maschinenbelegungsproblems durch die Anwendung eines heuristischen Verfahrens, lässt sich mit den dadurch gewonnenen Informationen ein Ablaufgraph realisieren.

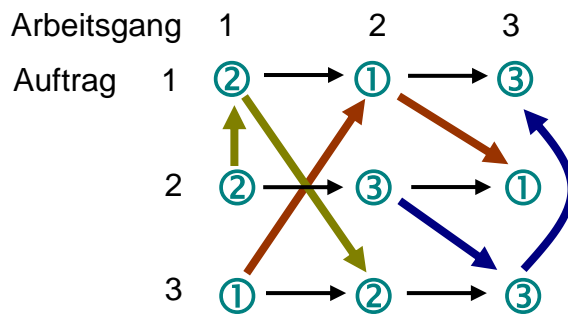


Abb. 3 Ablaufgraph für $m = n = 3$

Anhand der Bearbeitungszeiten (Abb. 2.), und der im Ablaufgraph für jede Maschine ersichtliche Auftragsfolge, lässt sich nun ein maschinenorientiertes Gantt-Diagramm erstellen. In diesem sind die Wartezeiten der einzelnen Maschinen leicht zu erkennen.

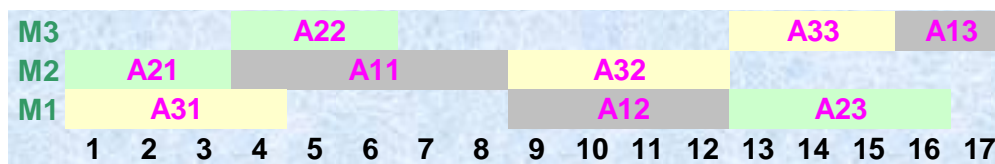


Abb. 4 Maschinenorientiertes Gantt-Diagramm

Falls erforderlich kann man das maschinenorientierte Gantt-Diagramm in ein auftragsorientiertes Gantt-Diagramm überführen.

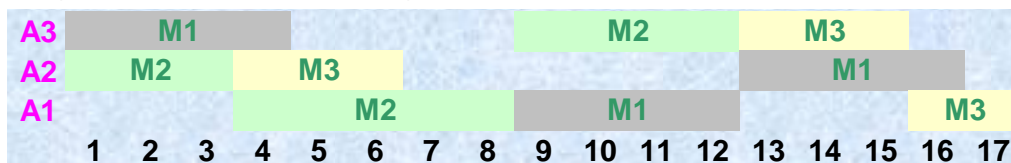


Abb. 5 Auftragsorientiertes Gantt-Diagramm

1.3 Klassifikation

Die verschiedenen Modelle der Maschinenbelegungsplanung sind durch unterschiedliche

Maschinencharakteristik (α),
Auftragscharakteristik (β) und
Zielsetzung (γ) definiert.

Die möglichen Fallunterscheidungen werden durch das Tripel $[\alpha|\beta|\gamma]$ definiert.

1.3.1 Maschinencharakteristika α

Die Maschinencharakteristik wird in zwei Gruppen eingeteilt.

A) Aufträge mit einem Arbeitsgang

- Eine Maschine $\alpha_1 = \circ$, $m=1$
Bei Problemen mit einer Maschine, sind die Bearbeitungszeiten nur vom Auftrag abhängig $t_{j1} = t_j$.
- Identische parallele Maschinen $\alpha_1 = IP$
Alle Maschinen besitzen eine identische Maschinengeschwindigkeit.
Für die Bearbeitungszeiten gilt daher $t_{ji} = t_j$.
- Uniforme parallele Maschinen $\alpha_1 = UP$
Die Maschinengeschwindigkeit (und dadurch auch die Bearbeitungszeit) ist von der jeweiligen Maschine abhängig. Das bedeutet, daß jede Maschine eine spezielle Maschinengeschwindigkeit besitzt, die vom zu Bearbeitenden Auftrag unabhängig ist.
Es gilt: $t_{ji} = \frac{t_j}{p_i}$
- Heterogene parallele Maschinen $\alpha_1 = HP$
Die Maschinengeschwindigkeit ist sowohl von der Maschine, als auch vom Auftrag abhängig. Jeder Arbeitsgang ist auf einer vorgeschriebenen Maschine μ_{jh} mit einer entsprechenden Bearbeitungsdauer t_{jh} zu bearbeiten.

B) Aufträge mit mehreren Arbeitsgängen

- Flow Shop (Fließfertigung) $\alpha_1 = F$
Alle Aufträge haben die gleiche Maschinenfolge $\mu_j = (1,2,\dots,m)$.
Jeder Auftrag ist auf jeder Maschine genau einmal zu bearbeiten.

- Permutations- Flow Shop $\alpha_1 = PF$
 Alle Aufträge haben die gleiche Maschinenfolge $\mu_j = (1, 2, \dots, m)$.
 Jeder Auftrag ist auf jeder Maschine genau einmal zu bearbeiten.
 Alle Maschinen haben die gleiche Auftragsfolge.
- Job Shop (Werkstattfertigung) $\alpha_1 = J$
 Jeder Auftrag hat eine spezielle Maschinenfolge $\mu_j = (1, 2, \dots, m)$.
 Ein Auftrag kann auf einer Maschine auch mehrmals oder gar nicht bearbeitet werden.
- Open Shop $\alpha_1 = O$
 Es sind weder Arbeitsgang noch Maschinenfolgen vorgegeben.

1.3.2 Auftragscharakteristika β

Im Hinblick auf Auftragscharakteristika wird zwischen 10 Gruppen von Merkmalen unterschieden.

- Auftragszahl n
 Hier wird zwischen den Fällen einer konstanten ($n = \text{const.}$) oder beliebigen ($^\circ$) Anzahl von Aufträgen unterschieden.
- Unterbrechbarkeit
 Es gibt in diesem Fall unterschiedliche Möglichkeiten.
 - Eine Unterbrechung ist während der Bearbeitung jederzeit möglich.
 Unterbrechungen während der Bearbeitung (oder Wartezeiten auf einer neuen Maschine), sind nicht erlaubt (no wait).
 - Unterbrechungen sind lediglich während der Wartezeit auf eine neue Maschine erlaubt.
 - Während der Bearbeitung darf nicht unterbrochen werden ($^\circ$).
- Reihenfolgebeziehungen
 Man unterscheidet zwischen Reihenfolgebeziehungen in Form von gerichteten zyklensfreien Graphen (prec.), Reihenfolgebeziehungen in Form eines gerichteten Baumes (tree), und Aufträgen ohne Reihenfolgebeziehungen ($^\circ$).
- Auftragsfreigabetermine und Nachlaufzeiten a_j, n_j
- Bearbeitungszeiten t_j
- Reihenfolgeabhängige Rüstzeiten
- Ressourcenbeschränkungen
- Fertigstellungstermine f_j
- Arbeitsgangzahl
- Lagerkapazitätsbeschränkungen

1.3.3 Zielsetzungen γ

Es werden verschiedene Zeitgrößen und Auftragszahlen betrachtet, wobei entweder deren Gesamtwert, Durchschnittswert oder Maximalwert zu minimieren ist.

Man unterscheidet zwischen drei Gruppen von Zielsetzungen.

A) Durchlaufzeitbezogene Spiele

- Minimierung der Zykluszeit Z .
Als Zykluszeit wird die Zeitspanne vom Beginn der Bearbeitung des ersten Auftrags, bis zur Fertigstellung des letzten zu bearbeitenden Auftrags bezeichnet.
- Minimierung der Wartezeit W_j , W_{ji}
 W_{ji} = Zeitdauer die ein Auftrag j vor Maschine i auf deren Freigabe wartet.
 W_j = Gesamte Wartezeit von Auftrag j .
- Minimierung der Durchlaufzeit D_j
Die Durchlaufzeit des Auftrags j beschreibt die Zeitspanne, die von seiner Bereitstellung a_j bis zur Fertigstellung F_j benötigt wird.

B) Kapazitätsorientierte Ziele

- Minimierung der Summe der Leerzeiten L .
- Maximierung der durchschnittlichen Kapazitätsauslastung.

C) Terminorientierte Ziele

- Minimierung der maximalen Terminabweichung T_j .
- Minimierung maximale Verspätung V_j .
- Minimierung Summe aller Verspätungen V_j .

2. Anwendung der Heuristiken

2.1 Das Verfahren von Akers (1956)

Mit Hilfe dieses Verfahrens ist lediglich die Lösung von Problemen mit zwei Aufträgen möglich. Wir betrachten ein Flow Shop Problem mit zwei Aufträgen und vier Maschinen [$n=2$]. Die einzelnen Arbeitsgänge jedes Auftrags werden auf verschiedenen Maschinen ausgeführt, und besitzen unterschiedliche Bearbeitungszeiten (Abb. 6).

Bearbeitungszeiten t_{ji}		Maschinen i			
		1	2	3	4
Aufträge j	1	4	1	2	4
	2	2	3	3	1

Abb. 6 Bearbeitungszeiten

Mit dieser Information läßt sich ein zweidimensionales Koordinatensystem - *Operationsfeld* - konstruieren (Abb. 7). Jede Achse entspricht einem der beiden Aufträge. Falls beide Aufträge zur gleichen Zeit auf einer identischen Maschine bearbeitet werden sollen, entsteht ein *Konfliktfeld* (in Abb. 7 grau dargestellt).

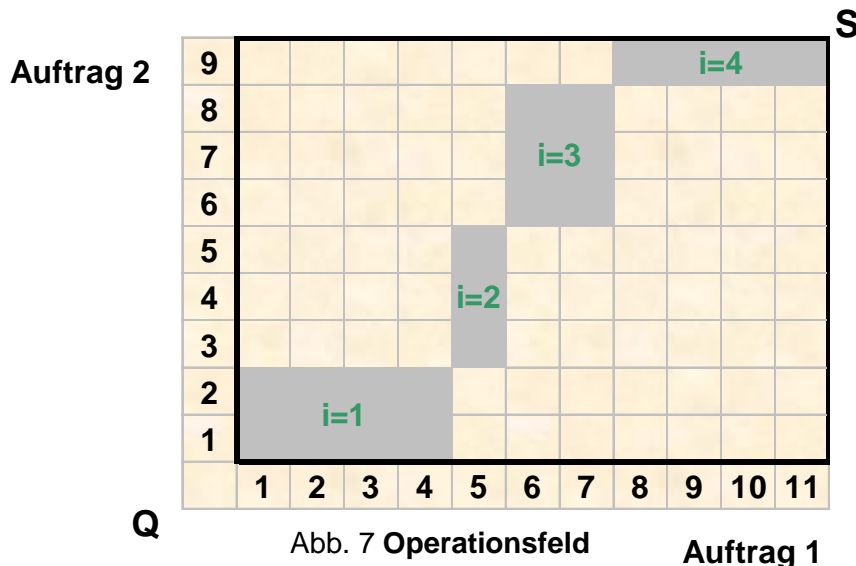


Abb. 7 Operationsfeld

Auftrag 1

Das Verfahren von *Akers* bezieht sich dabei auf die Zielsetzung "Minimierung der Zykluszeit". Es besteht darin, den kürzesten Weg zwischen dem Punkt Q (Bereitstellungstermin beider Aufträge) und dem Punkt S (Fertigstellungstermin beider Aufträge), zu konstruieren. Die Konfliktfelder müssen dabei umgangen werden.

Der Weg von einem "Kästchen" des Operationsfeldes zum nächsten entspricht exakt einer Zeiteinheit, und wird in einer Iteration festgelegt. Der Weg von Q nach S besteht daher aus vielen einzelnen Iterationen, wobei es für jeden Schritt drei unterschiedliche Richtungen geben kann:

- ↑ Vertikaler Schritt = Bearbeitung von Auftrag 2
- Horizontaler Schritt = Bearbeitung von Auftrag 1
- ↗ Diagonaler Schritt = Gleichzeitige Bearbeitung von Auftrag 1 und 2

Die Gesamtlänge des Weges (Anzahl der Iterationen) von Q nach S entspricht der Zykluszeit.

Es ist möglich beliebig viele unterschiedliche Wege von Q nach S zu ermitteln. Für eine effiziente Vorgehensweise ist es jedoch erforderlich, die Anzahl der in die Betrachtung einzubeziehenden Wege weitgehend einzuschränken. Einen Algorithmus für eine gezielte Selektion unterschiedlicher Wege gibt *Akers* jedoch nicht an.

Neuere Forschungsergebnisse bedienen sich zur Lösung des "Kürzeste- Wege-Problems" der Konstruktion eines gerichteten Graphen. Dessen Knotenmenge V beinhaltet neben der Quelle Q und der Senke S , die zwei gegenüberliegenden Ecken eines Konfliktfeldes.

Beispiel:

Wir arbeiten mit den in Abb. 6 angegebenen Bearbeitungszeiten, und konstruieren im Operationsfeld mögliche Wege von Q nach S.

Weg 1

Ein denkbarer von Q nach S ist in Abb. 8 wiedergegeben. Das zugehörige Gantt-Diagramm ist in Abb. 9 abgebildet.

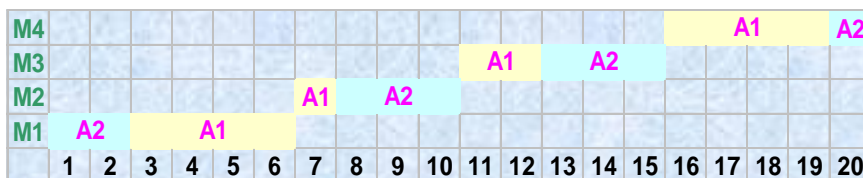
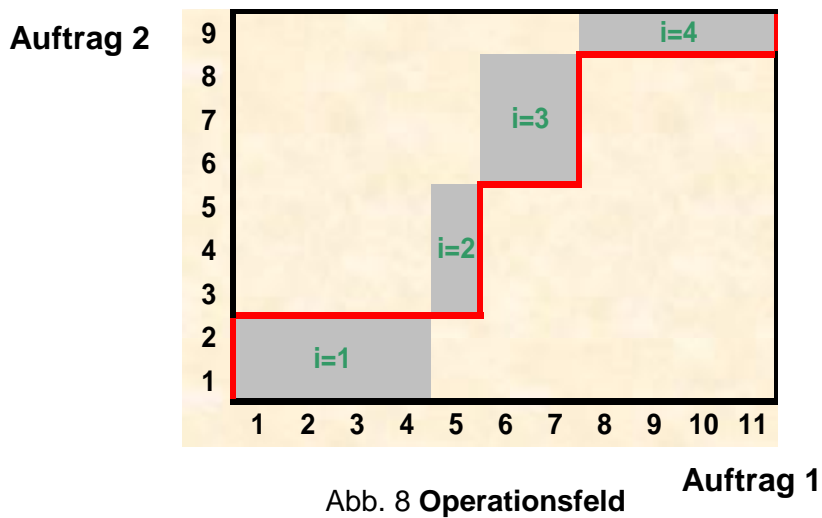


Abb. 9 Gantt-Diagramm

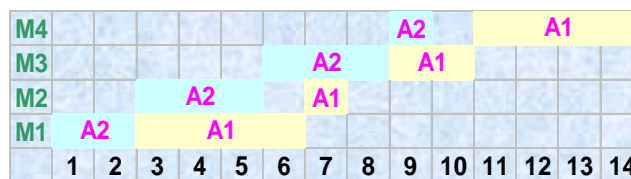
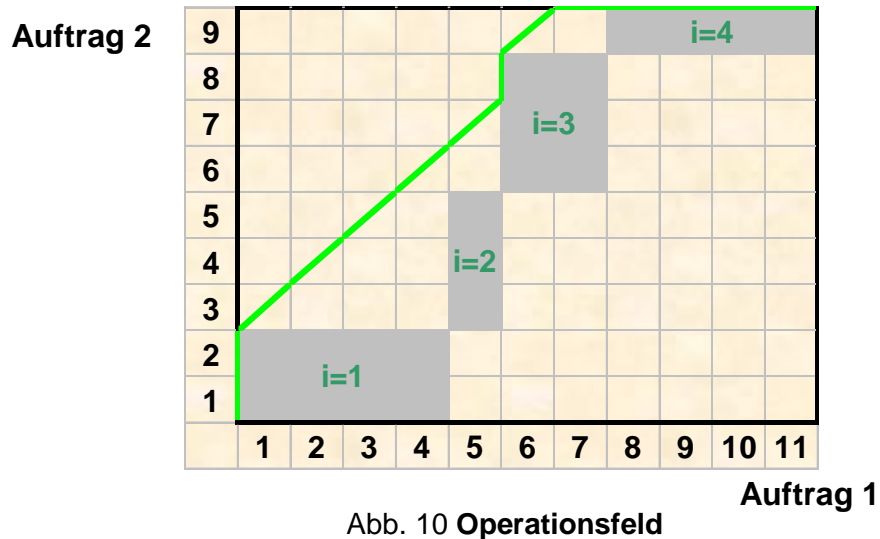
Weg 1 benötigt 20 Schritte und besitzt somit eine Zykluszeit von 20.

- 2 ZE: ↑ A2 wird auf M1 bearbeitet
- 4 ZE: → A1 wird auf M1 bearbeitet
- 1 ZE: → A1 wird auf M2 bearbeitet
- 3 ZE: ↑ A2 wird auf M2 bearbeitet
- 2 ZE: → A1 wird auf M3 bearbeitet
- 3 ZE: ↑ A2 wird auf M3 bearbeitet
- 4 ZE: → A1 wird auf M4 bearbeitet
- 1 ZE: ↑ A2 wird auf M4 bearbeitet

Aufeinanderfolgende Schritte mit gleichen Bearbeitungsvorgängen sind in obiger Aufstellung zusammengefaßt.

Weg 2

Eine zweite Möglichkeit einen Weg von Q nach S zu gehen, ist in den Abbildungen 10 und 11 wiedergegeben.



Weg 2 benötigt dabei 14 Schritte (Zykluszeit 14).

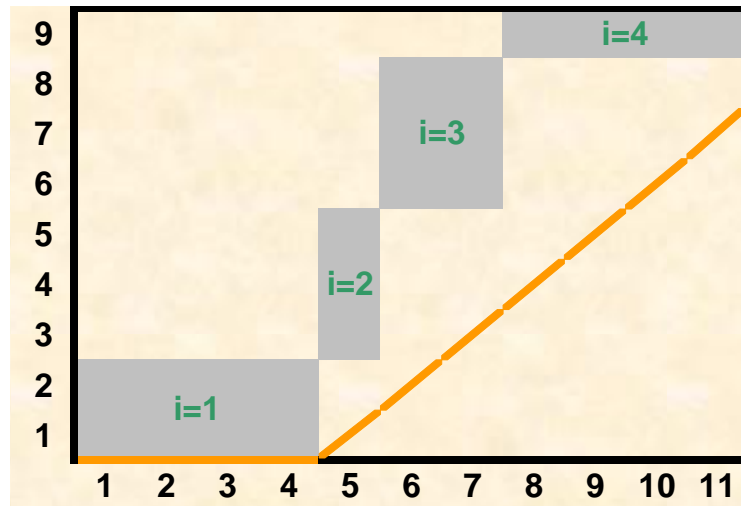
- 2 ZE: ↑ A2 wird auf M1 bearbeitet
- 3 ZE: ↗ A1 wird auf M1 und A2 auf M2 bearbeitet
- 1 ZE: ↗ A1 wird auf M1 und A2 auf M3 bearbeitet
- 1 ZE: ↗ A1 wird auf M2 und A2 auf M3 bearbeitet
- 1 ZE: ↑ A2 wird auf M3 bearbeitet
- 1 ZE: ↗ A1 wird auf M3 und A2 auf M4 bearbeitet
- 1 ZE: → A1 wird auf M3 bearbeitet
- 4 ZE: → A1 wird auf M4 bearbeitet

Die Zykluszeit ist gegenüber Weg 1 um sechs Schritte verkürzt. Dies ist aufgrund der sechs diagonalen Schritte erreicht worden, die eine gleichzeitige Bearbeitung von zwei Aufträgen auf zwei Maschinen bedeuten.

Weg 3

Die dritte Möglichkeit ist in den Abbildungen 12 und 13 wiedergegeben.

Auftrag 2



Auftrag 1

Abb. 12 Operationsfeld

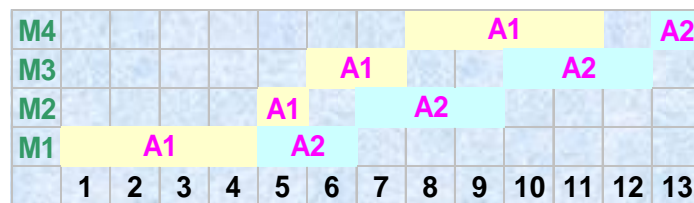


Abb. 13 Gantt- Diagramm

Weg 3 benötigt 13 Schritte von Q nach S (Zykluszeit 13).

- 4 ZE: → A1 wird auf M1 bearbeitet
- 1 ZE: ↗ A1 wird auf M2 und A2 auf M1 bearbeitet
- 1 ZE: ↗ A1 wird auf M3 und A2 auf M1 bearbeitet
- 1 ZE: ↗ A1 wird auf M3 und A2 auf M2 bearbeitet
- 2 ZE: ↗ A1 wird auf M4 und A2 auf M2 bearbeitet
- 2 ZE: ↗ A1 wird auf M4 und A2 auf M3 bearbeitet
- 1 ZE: ↑ A2 wird auf M3 bearbeitet
- 1 ZE: ↑ A2 wird auf M2 bearbeitet

Die Zykluszeit ist gegenüber Weg 2 erneut um einen Schritt verkürzt. Dies ist aufgrund der mittlerweile insgesamt 7 Diagonalen Schritte ermöglicht. Von den insgesamt 13 benötigten Zeiteinheiten werden 7 optimal zur gleichzeitigen Bearbeitung von zwei Aufträgen genutzt.

2.2 Das Verfahren von Mensch

Die "Diagonalmethode von Mensch" stellt lediglich eine Erweiterung des Verfahrens von Akers dar. Sie ist somit ebenfalls auf die Lösung von Problemen mit zwei Aufträgen spezialisiert [$n=2$].

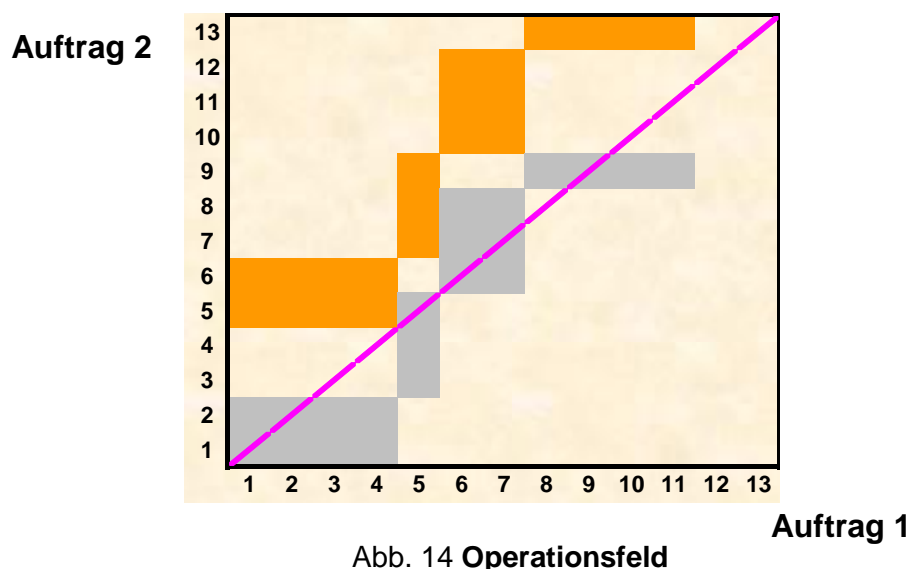
Mensch benützt zur Lösung des Kürzeste- Wege- Problems die Ursprungsdiagonale, welche den kürzesten Weg zwischen Q und S darstellt.

Die im Weg stehenden Konfliktfelder, werden einfach nach rechts, oder nach oben verschoben. Diese Verschiebung entspricht dem Einfügen einer Wartezeit. Bei Verschiebung nach rechts entsteht eine Wartezeit für Auftrag 2. Bei einer Verschiebung nach oben, kommt es für Auftrag 1 zu einer Wartezeit.

Beispiel:

Wir arbeiten erneut mit den in Abb. 6 angegebenen Bearbeitungszeiten, und konstruieren im Operationsfeld eine Diagonale von Q nach S (Abb. 14 und 16). Da der diagonale Weg alle vier grau unterlegten Konfliktfelder schneidet, müssen diese entweder nach rechts, oder nach oben verschoben werden (Orange unterlegt). Um die Wartezeiten so gering wie möglich zu halten, wird für eine Maschine nach der anderen geprüft, um wieviel Einheiten eine Verschiebung vorzunehmen ist.

Verschiebung der Konfliktfelder nach oben (Abb. 14 und 15).



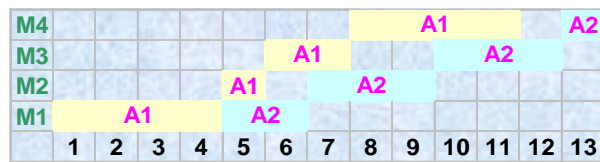


Abb. 15 Gantt- Diagramm

Zuerst prüft man das Konfliktfeld von Maschine 1.

Um die Diagonale in Abbildung 14 nicht zu schneiden, muß eine Verschiebung um 4 Einheiten nach oben vorgenommen werden. Diese Verschiebung gilt identisch für alle Konfliktfelder, da sich sonst die Arbeitsgänge innerhalb eines Auftrags überschneiden würden). Im Operationsfeld und im Gantt- Diagramm ist dadurch gleich zu Beginn eine Wartezeit von 4 Zeiteinheiten für Auftrag 2 eingetragen.

Bei einer Überprüfung der weiteren Maschinen zugeordneten Konfliktfelder ist erkennbar, daß die Verschiebung um 4 Einheiten für alle Konfliktfelder genügt, um einen Schnitt mit der Diagonalen zu verhindern.

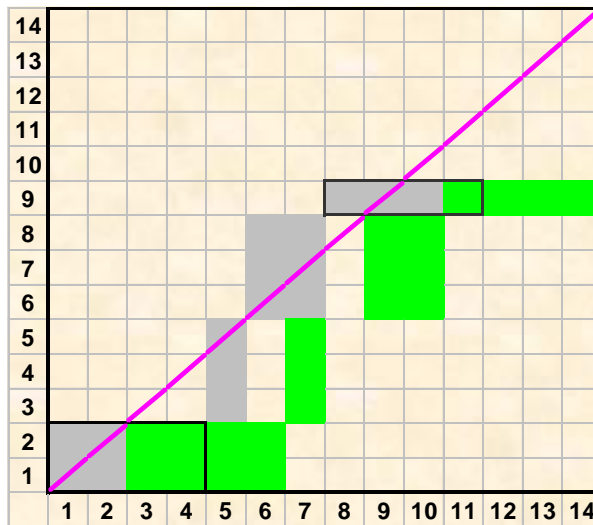
Insgesamt werden bei dieser Verschiebung nach oben 13 Schritte von Q nach S benötigt. Die Zykluszeit beträgt 13, wobei die einzelnen Bearbeitungszeiten folgenden Aufträgen und Maschinen zugeordnet sind.

- 4 ZE: ➤ A1 wird auf M1 bearbeitet
- 1 ZE: ➤ A1 wird auf M2 und A2 auf M1 bearbeitet
- 1 ZE: ➤ A1 wird auf M3 und A2 auf M1 bearbeitet
- 1 ZE: ➤ A1 wird auf M3 und A2 auf M2 bearbeitet
- 2 ZE: ➤ A1 wird auf M4 und A2 auf M2 bearbeitet
- 2 ZE: ➤ A1 wird auf M4 und A2 auf M3 bearbeitet
- 1 ZE: ➤ A2 wird auf M3 bearbeitet
- 1 ZE: ➤ A2 wird auf M2 bearbeitet

Diese Lösung ist mit dem Weg 3 im vorhergehenden Beispiel identisch.

Verschiebung der Konfliktfelder nach rechts

Auftrag 2



Auftrag 1

Abb. 16 Operationsfeld

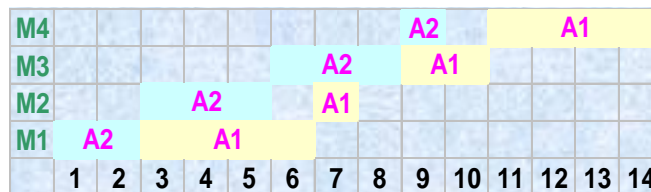


Abb. 17 Gantt- Diagramm

Zuerst wird das Konfliktfeld von Maschine 1 überprüft. Um die Diagonale in Abbildung 16 nicht zu schneiden, muß eine Verschiebung um 2 Einheiten nach rechts vorgenommen werden. Im Operationsfeld und im Gantt- Diagramm ist dadurch gleich zu Beginn eine Wartezeit von 2 Zeiteinheiten für Auftrag 1 einzutragen.

Bei dem der Maschine 2 zugeordneten Konfliktfeld, genügt die Verschiebung um 2 Einheiten, um keinen Schnitt mit der Diagonalen zu erhalten.

Bei dem Konfliktfeld von Maschine 3 genügt die Verschiebung um 2 Einheiten allerdings nicht, da die Diagonale dabei geschnitten wird. Erst bei einer Verschiebung um 3 Einheiten ist der Konflikt umgangen.

Für Konfliktfeld 4 genügt die Verschiebung um 3 Einheiten ebenfalls.

2.3 Der Johnson-Algorithmus (1954)

Der Algorithmus von Johnson ist ein einfaches Verfahren, um Zwei Maschinen-Flow Shop-Probleme $[F2 | Z]$ schnell und exakt zu lösen.

Beispiel:

Wir betrachten ein Flow Shop Problem mit zwei Maschinen und 5 Aufträgen. Die Bearbeitungszeiten sind in Abbildung 18 angegeben.

Bearbeitungszeiten t_{ji}	Maschinen i	
	1	2
1	3	4
2	5	1
3	2	5
4	4	2
5	1	3

Abb. 18 Bearbeitungszeiten

Die Vorgehensweise ist in drei Schritte gegliedert.

- ❶ Man unterteilt die Menge J aller Aufträge in zwei disjunkte Teilmengen.
 - $J_1 = \{ j \mid t_{j1} \leq t_{j2} \}$ → im Bsp.: Aufträge 1,3,5
 - $J_2 = \{ j \mid t_{j1} > t_{j2} \}$ → im Bsp.: Aufträge 2,4
- ❷ Anschließend sortiert man die Aufträge aus Menge J_1 nach monoton zunehmender Bearbeitungszeit t_{j1} auf M_1 . Dadurch entsteht Teilplan $\prec J_1$. Danach sortiert man die Aufträge aus Menge J_2 nach monoton abnehmender Bearbeitungszeit t_{j2} auf M_2 . Hierbei entsteht Teilplan $\prec J_2$
 - im Bsp.: $\prec J_1 =$ Aufträge 5,3,1 $\prec J_2 =$ Aufträge 4,2
- ❸ Die optimale Lösung entsteht durch Zusammenfügen beider Teilpläne zu $\prec J_1, J_2$.
 - im Bsp.: $\prec J_1, J_2] = \prec 5,3,1,4,2$

Abb. 19 zeigt die Anordnung der Aufträge nach Anwendung des Johnson Algorithmus.



Abb. 19 Maschinenorientiertes Gantt- Diagramm

2.4 Das Shifting Bottleneck- Verfahren

Allgemeines:

Dieses Verfahren gehört zu den derzeit besten Eröffnungsverfahren zur Lösung von Job- Shop Problemen [J | Z].

Zu Beginn sind die Arbeitsgangfolgebeziehungen und die Bearbeitungszeiten bekannt (Abb. 20, 21 und 22). Für keine der Maschinen sind jedoch Reihenfolgebeziehungen angegeben. Ziel des Verfahrens ist es, mit Hilfe der Bearbeitungszeiten und den Arbeitsgangfolgen aus dem Maschinenfolgegraphen einen Ablaufgraph zu entwickeln.

Zur Lösung wird das Problem in m Iterationen zerlegt, die ein Teilproblem [J | Z] darstellen. In jedem Teilproblem wird für eine weitere Maschine die Auftragsfolge festgelegt. Dabei wird diejenige Maschine eingeplant, deren Zykluszeit am höchsten ist (Bottleneck- Maschine).

Zeit t_{ji}	Maschine i		
	1	2	3
1	4	5	2
2	4	3	4
3	4	4	3

Abb. 20 Bearbeitungszeiten

Zeit t_{ji}	Arbeitsgang h		
	1	2	3
1	5	4	2
2	3	4	4
3	4	4	3

Abb. 21 Bearbeitungszeiten

Maschine j	Arbeitsgang h		
	1	2	3
1	2	1	3
2	2	3	1
3	1	2	3

Abb. 22 Arbeitsgangfolgen

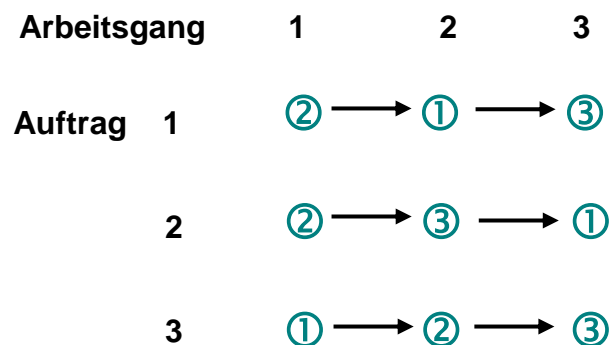


Abb. 23 Maschinenfolgegraph

Durchführung:

❶ Die Vorlauf- und Nachlaufzeiten der einzelnen Arbeitsgänge werden mit Hilfe der Bearbeitungszeiten berechnet.

Die Vorlaufzeit eines Arbeitsganges entspricht der Summe der Bearbeitungszeiten der vorangegangenen Arbeitsgänge. Die Nachlaufzeit eines Arbeitsganges entspricht der Summe der Bearbeitungszeiten der nachfolgenden Arbeitsgänge.

Beispiel: Die Bearbeitungszeiten sind Abb. 21 entnommen.

Vorlaufzeiten → $a_{33} = t_{31} + t_{32} = 4+4 = 8$
 $a_{12} = t_{11} = 5$
 $a_{23} = t_{21} + t_{22} = 3+4 = 7$
 $a_{22} = t_{21} = 3$
 $a_{11} = 0$

Nachlaufzeiten → $a_{33} = 0$
 $a_{12} = t_{13} = 2$
 $a_{23} = 0$
 $a_{22} = t_{23} = 4$
 $a_{11} = t_{12} + t_{13} = 4+2 = 6$

In Abbildung 24 sind für jeden Arbeitsgang zusätzlich zu den Bearbeitungszeiten die Vorlauf- und Nachlaufzeiten mit angegeben.

	Maschine 1			Maschine 2			Maschine 3		
Arbeitsgang	A12	A23	A31	A11	A21	A32	A13	A22	A33
Vorlaufzeit	5	7	0	0	0	4	9	3	8
Bearbeitungszeit	4	4	4	5	3	4	2	4	3
Nachlaufzeit	2	0	7	6	8	3	0	4	0

Abb. 24 **Bearbeitungs-, Vorlauf- und Nachlaufzeiten**

❷ Mit Hilfe des Schrage-Algorithmus werden die Arbeitsgänge vorläufig auf den entsprechenden Maschinen eingeplant. Dabei wird nach folgender Regel vorgegangen:

Je kürzer die Vorlaufzeit, desto früher einplanen.

Je länger die Nachlaufzeit, desto früher einplanen.

Die eingeplanten Arbeitsgänge werden mit Hilfe eines Gantt-Diagramms dargestellt (Abb. 25). Man sieht deutlich, daß bei den Aufträgen 1 und 3 Konflikte auftreten. Die Bearbeitung von A12 beginnt nach 6 Zeiteinheiten, obwohl Arbeitsgang A11 erst nach 8 Zeiteinheiten beendet ist. Arbeitsgang A33 beginnt nach 8 Zeiteinheiten, obgleich A32 erst nach 12 ZE beendet ist.

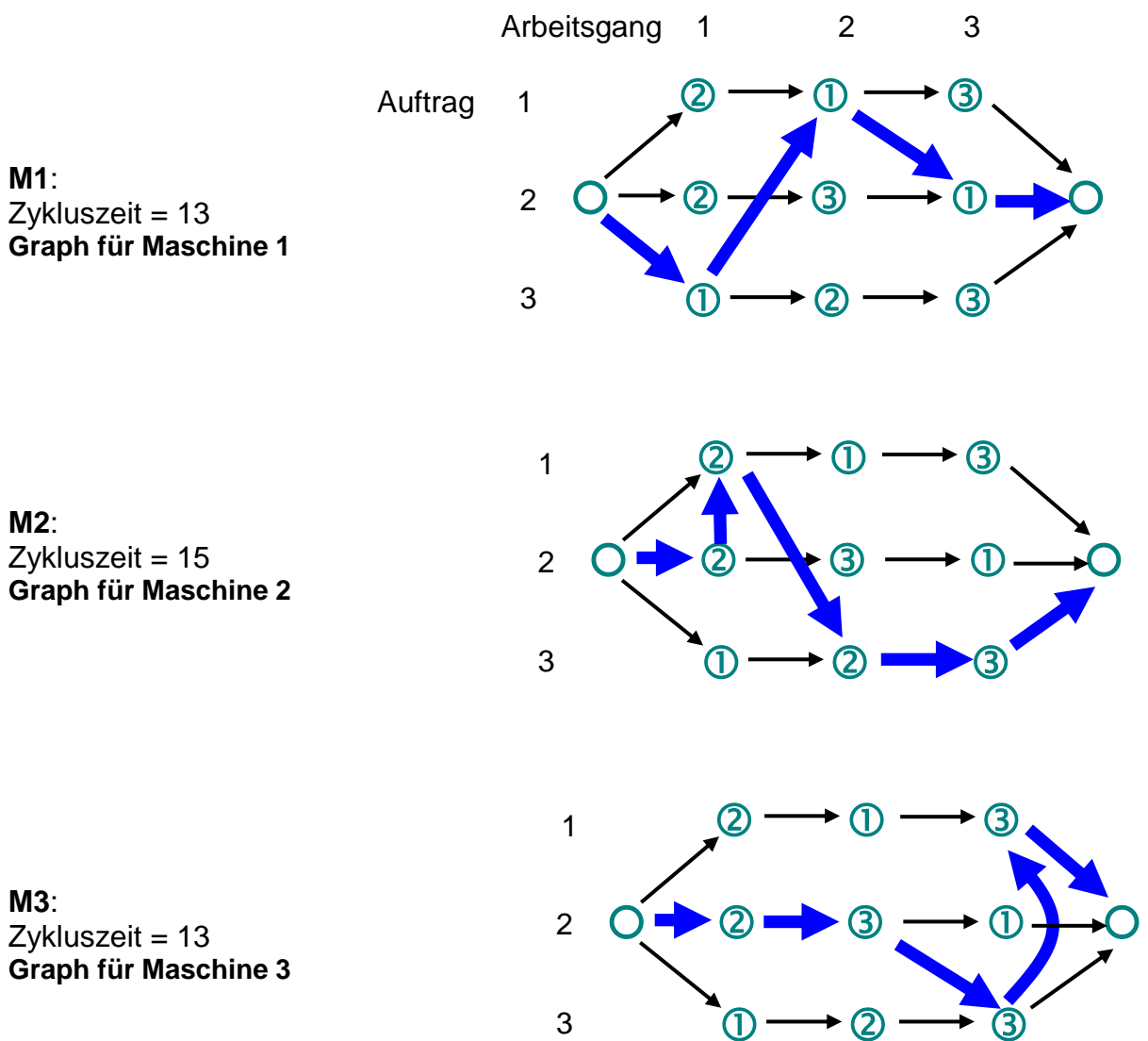


Abb. 25 Maschinenorientiertes Gantt- Diagramm

Aus Abb. 25 entnehmen wir folgende Zykluszeiten:

- M3 = 13
- M2 = 15
- M1 = 13

Die Auftragsfolgen der einzelnen Maschinen lassen sich auch mit Hilfe von Graphen darstellen.



③ Iteration 1:

Maschine 2 wird als Erste eingeplant, da ihre Zykluszeit mit 15 am höchsten ist. Die Auftragsfolge A21 → A11 → A32 auf Maschine 2 wird dadurch endgültig festgelegt.

Als nächsten Schritt muß man die Vorlaufzeiten der auf Maschine 2 lokalisierten Arbeitsgänge korrigieren (maschinengebundene Vorlaufzeit).

Da Arbeitsgang A11 auf Maschine 2 erst nach A21 bearbeitet wird, erhöht sich seine Vorlaufzeit auf 3 (entspricht Bearbeitungszeit A21). A32 wird auf M2 erst nach den beiden Arbeitsgängen A21 und A11 bearbeitet. Die Vorlaufzeit von A32 erhöht sich dadurch auf 8 Zeiteinheiten (entspricht Bearbeitungszeit A21 + A11).

$$\text{Vorlaufzeit A11} = \text{Bearbeitungszeit A21} = 3$$

$$\text{Vorlaufzeit A32} = \text{Bearbeitungszeiten A21} + \text{A11} = 8$$

Abb. 26 zeigt die Auftragsfolge, mit den neuen Vorlaufzeiten der auf M2 liegenden Arbeitsgänge.

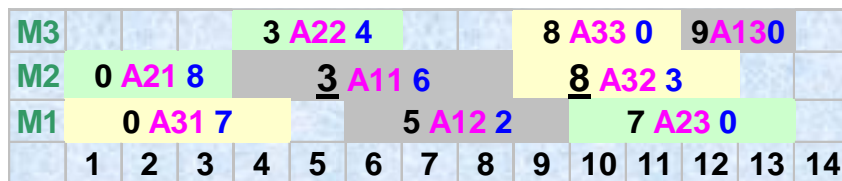
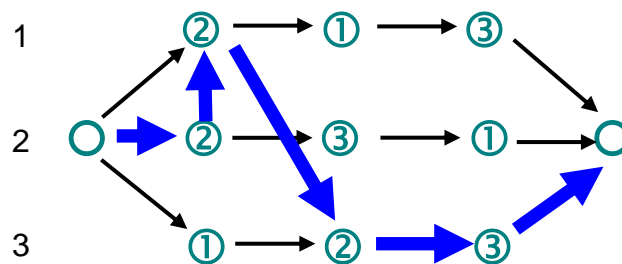


Abb. 26 **Maschinenorientiertes Gantt- Diagramm**



Ablaufgraph für Maschine 2

Schließlich werden noch die Vorlaufzeiten, der A11 und A32 folgenden Arbeitsgänge korrigiert (auftragsgebundene Vorlaufzeit).

Arbeitsgang A11 ist nach 8 ZE beendet. Erst zu diesem Zeitpunkt kann A12 beginnen. Die Vorlaufzeit von A 12 erhöht sich also auf 8 ZE.

	Vorlaufzeit	A11		= 3
+	Bearbeitungszeit	A11		= 5
=	Vorlaufzeit	A12		= 8

	Bearbeitungszeit	A12		= 4
+	Vorlaufzeit	A13		= 12

	Vorlaufzeit	A32		= 8
+	Bearbeitungszeit	A32		= 4
=	Vorlaufzeit	A33		= 12

Abb. 27 zeigt die Auftragsfolge mit den neuen Vorlaufzeiten der nachfolgenden Arbeitsgänge von A11 und A32.

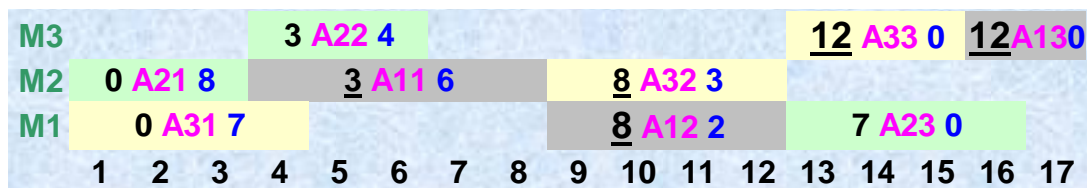


Abb. 27 Maschinenorientiertes Gantt- Diagramm

④ Iteration 2:

Maschine 3 wird als nächste eingeplant, da nun ihre Zykluszeit mit 17 am höchsten ist. Die Auftragsfolge A22 → A33 → A13 wird somit auf Maschine 3 festgelegt.

Korrektur der maschinengebundenen Vorlaufzeiten.

	Vorlaufzeit	A12		= 12
+	Bearbeitungszeit	A12		= 3
=	Vorlaufzeit	A13		= 15

⑤ Iteration 3:

Als letzte Maschine wird M1 eingeplant. Die Zykluszeit für M1 beträgt 16 ZE. Die Zykluszeit des gesamten Job-Shop- Problems beträgt nun Z=17.

2.5 Verbesserungsverfahren

Die unter diesem Begriff eingeordneten Heuristiken werden zur Lösungsoptimierung von Job Shop- Problemen verwendet. Von einem gegebenen zulässigen Plan ausgehend, wird bei Verbesserungsverfahren durch Nachbarschaftssuche nach einer besseren Lösung gesucht.

- Um eine benachbarte Lösung zu erhalten werden zwei, auf einer identischen Maschine aufeinanderfolgende Arbeitsgänge, die auf dem kritischen Pfad liegen getauscht.

Werden Arbeitsgänge getauscht, die nicht nacheinander folgen, kann es zur Bildung einer Schleife kommen. Liegen die zu tauschenden Arbeitsgänge nicht auf dem kritischen Pfad, ist keine Verbesserung möglich da beim Tausch kein kritischer Weg verkürzt wird.

Beispiel [J | Z] (m=3, n=3):

Bei einem Maschinenbelegungsproblem betrachten wir eine zulässige Lösung mit der Zykluszeit $Z=14$.

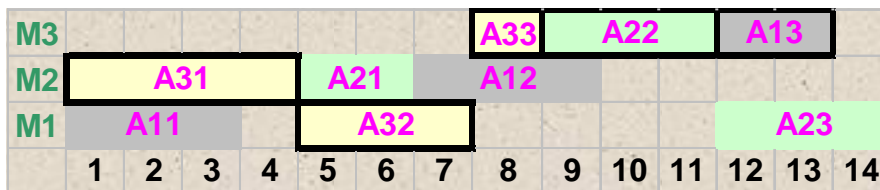


Abb. 28 Maschinenorientiertes Gantt- Diagramm

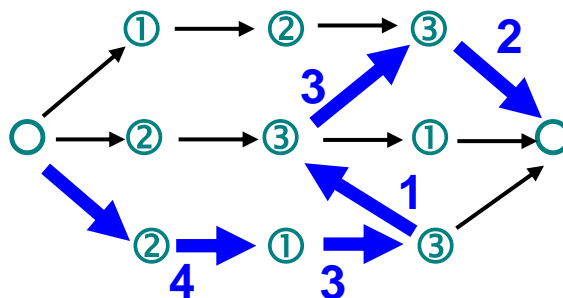


Abb. Ablaufgraph für Maschine 3

Wir tauschen auf Maschine M3 die Arbeitsgänge A22 und A33 gegeneinander aus. Die Zykluszeit ist dadurch auf $Z=12$ reduziert worden.

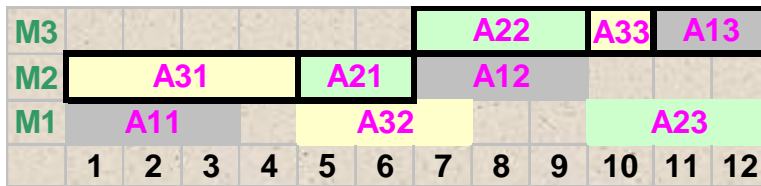


Abb. 29 Maschinenorientiertes Gantt- Diagramm

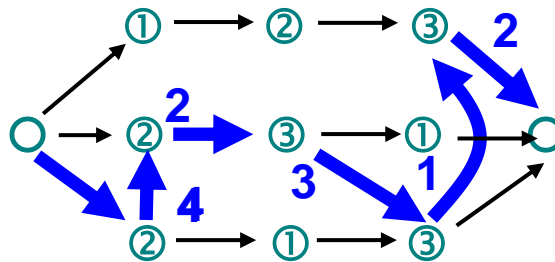


Abb. Ablaufgraph für Maschine 3

Um ein analytisches Vorgehen zu ermöglichen, sind verschiedene Strategien, wie zum Beispiel "Simulated Annealing" oder "Tabu Search", konstruiert worden. Diese werden hier jedoch nicht näher erläutert.

2.6 Branch & Bound Verfahren

Das Branch & Bound Prinzip beruht auf der sukzessiven Enumeration aktiver Pläne.

Jede optimale Lösung ist ein aktiver Plan oder kann zumindest in einen überführt werden. Zur Lösung werden alle aktiven Pläne generiert und unter diesen der Beste ausgewählt.

Durch dieses Vorgehen entsteht ein Entscheidungsbaum, der aus mehreren Knoten (Teilproblemen) besteht. In einem Teilproblem wird die Menge A der aktuell einplanbaren Arbeitsgänge untersucht. Aus dieser Menge wird derjenige Arbeitsgang X mit dem frühesten Endzeitpunkt ausgewählt, und die diesem Arbeitsgang zugeordnete Maschine eingeplant.

Sind in der Menge A noch weitere Arbeitsgänge auf derselben Maschine wie X zu bearbeiten, werden diese in einem neuen Teilproblem eingeplant. Der Baum wurde um einen Knoten erweitert.

Die Zykluszeit entspricht der unteren Schranke (Lower Bound LB). Diese ist als der Maximalwert von maschinenorientierten unteren Schranken und auftragsorientierten unteren Schranken definiert.

Beispiel [J | Z]: (m=n=3)

Ausgangsproblem P0:=<]. Zu Beginn sind noch keine Arbeitsgänge eingeplant.



Die Daten für das aktuelle Problem sind in den Abbildungen Nr. 30 (Bearbeitungszeiten) und Nr. 31 (Gantt- Diagramm) angegeben.

	Maschine 1			Maschine 2			Maschine 3		
Arbeitsgang	A12	A22	A32	A13	A23	A31	A11	A21	A33
Vorlaufzeit	1	3	8	3	8	0	0	0	15
Bearb. Zeit	2	5	7	9	4	8	1	3	6
Nachlaufzeit	9	4	6	0	0	13	11	9	0

Abb. 30

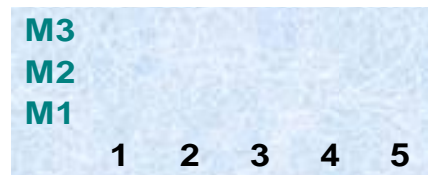


Abb. 31

❶ Auswahl der einplanbaren Arbeitsgänge. Von jedem Auftrag werden diejenigen Arbeitsgänge mit der geringsten Vorlaufzeit ausgewählt.

A11 (auf Maschine 3)

A21 (auf Maschine 3)

A31 (auf Maschine 2)

❷ Erfassen der maschinenorientierten Vorlaufzeiten F_{Mi} .

Die Bearbeitung der Arbeitsgänge kann frühestens zum effektiven Fertigstellungszeitpunkt $F_{PL,i}$, der von auf der gleichen Maschine zuvor eingeplanten Arbeitsgänge starten. Hierzu werden für jede Maschine, die im Gantt Diagramm (Abb. 31) sichtbaren Fertigstellungstermine, der bereits eingeplanten Arbeitsgänge notiert. Zu Beginn sind auf keiner der 3 Maschinen Arbeitsgänge eingeplant. Die frühesten maschinenorientierten Anfangszeiten sind in P0:

Maschine 1: $F_{M1} = 0$, Maschine 2: $F_{M2} = 0$, Maschine 3: $F_{M3} = 0$

❸ Berechnung der maschinenorientierten Nachlaufzeiten n_{Mi} .

Diese ergibt sich aus der Summe der Bearbeitungszeiten aller noch auf Maschine i zu fertigenden Arbeitsgänge. Hierfür werden, die Bearbeitungszeiten aller noch einzuplanenden Arbeitsgänge für jede Maschine separat addiert.

Momentan sind auf den Maschinen noch alle Arbeitsgänge zu bearbeiten (Abb. 30).

Maschine 1: $n_{M1} = \sum t_{M1} = t(A12) + t(A22) + t(A32) = 2+5+7 = 14$

Maschine 2: $n_{M2} = \sum t_{M2} = t(A13) + t(A23) + t(A31) = 9+4+8 = 21$

Maschine 3: $n_{M3} = \sum t_{M3} = t(A11) + t(A21) + t(A33) = 1+3+6 = 10$

④ Bestimmen der auftragsorientierten Vorlaufzeiten F_{Aj} .

Die Arbeitsgänge können frühestens zum effektiven Fertigstellungszeitpunkt vorhergehender Arbeitsgänge des gleichen Auftrags, welche zuvor eingeplant wurden, mit der Bearbeitung beginnen. Zu Beginn sind keine vorhergehenden Arbeitsgänge eingeplant. Die frühesten auftragsorientierten Anfangszeiten (siehe Abb. 31) sind im aktuellen Problem:

$$A11 (3): F_{Aj} = 0$$

$$A21 (3): F_{Aj} = 0$$

$$A31 (2): F_{Aj} = 0$$

⑤ Berechnung der auftragsorientierten Nachlaufzeiten n_{Aj} .

Diese ergibt sich aus der Summe der Bearbeitungszeiten n_{Aj} , aller noch für Auftrag j einzuplanenden Arbeitsgänge. Momentan sind noch keine Arbeitsgänge eingeplant (siehe Abb. 30).

$$\text{Auftrag 1: } n_{A1} = \sum t_{jA1} = t(A11) + t(A12) + t(A13) = 1+2+9 = 12$$

$$\text{Auftrag 2: } n_{A2} = \sum t_{jA2} = t(A21) + t(A22) + t(A23) = 3+5+4 = 12$$

$$\text{Auftrag 3: } n_{A3} = \sum t_{jA3} = t(A31) + t(A32) + t(A33) = 8+7+6 = 21$$

⑥ Bestimmen der Lower Bound LB.

$$LB: = \max \{ F_{M1}+n_{M1}, F_{M2}+n_{M2}, F_{M3}+n_{M3} ; F_{A1}+n_{A1}, F_{A2}+n_{A2}, F_{A3}+n_{A3} \}$$

$$LB: = \max \{ 0+14, 0+21, 0+10 ; 0+12, 0+12, 0+21 \} = 21$$

⑦ Bestimmen des frühesten Endzeitpunkts FE

Da für die drei betrachteten Arbeitsgänge noch keine Vorlaufzeiten gegeben sind, entspricht der früheste Endzeitpunkt eines Arbeitsganges seiner Bearbeitungszeit.

$$A11 (3), FE = 1$$

$$A21 (3), FE = 3$$

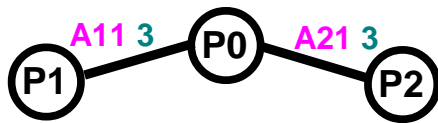
$$A31 (2), FE = 8$$

⑧ Einplanen aller Arbeitsgänge derjenigen Maschine, auf welcher sich der Arbeitsgang mit dem frühesten Endzeitpunkt befindet. Den frühesten Endzeitpunkt besitzt mit 1 Zeiteinheit Arbeitsgang A11 auf Maschine 3.
 $FE = \min \{1,3,8\} = 1$ auf Maschine $i=3$

⇒ A11 (3) und A21 (3) werden auf Maschine 3 eingeplant.

Da zwei Aufträge einzuplanen sind, entsteht eine Verzweigung in zwei Teilprobleme P1 bzw. P2.

Teilproblem P1 := <A11]. In Teilproblem P1 ist lediglich Arbeitsgang A11 eingeplant.



Die Daten für das aktuelle Problem sind in den Abbildungen Nr. 32 (Bearbeitungszeiten) und Nr. 33 (Gantt- Diagramm) angegeben.

	Maschine 1			Maschine 2			Maschine 3		
Arbeitsgang	A12	A22	A32	A13	A23	A31	A11	A21	A33
Vorlaufzeit	1	3	8	3	8	0	0	0	15
Bearb. Zeit	2	5	7	9	4	8	1	3	6
Nachlaufzeit	9	4	6	0	0	13	11	9	0

Abb. 32



Abb. 33

❶ Auswahl der einplanbaren Arbeitsgänge.

Wir ersetzen Arbeitsgang A11 durch den nachfolgenden Arbeitsgang A12:

- A12 (auf Maschine 1)
- A21 (auf Maschine 3)
- A31 (auf Maschine 2)

❷ Erfassen der maschinenorientierten Vorlaufzeiten F_{Mi} .

Im Teilproblem P1 ist auf M3 der Arbeitsgang A11 eingeplant (siehe Abb. 33).

- Maschine 1: $F_{M1} = 0$
- Maschine 2: $F_{M2} = 0$
- Maschine 3: $F_{M3} = \text{Bearbeitungszeit A11} = 1$

❸ Berechnung der maschinenorientierten Nachlaufzeiten n_{Mi} .

Der auf Maschine 3 eingeplante Arbeitsgang A11 entfällt (Abb. 32).

- Maschine 1: $n_{M1} = \sum t_{jM1} = t(A12) + t(A22) + t(A32) = 2+5+7 = 14$
- Maschine 2: $n_{M2} = \sum t_{jM2} = t(A13) + t(A23) + t(A31) = 9+4+8 = 21$
- Maschine 3: $n_{M3} = \sum t_{jM3} = t(A21) + t(A33) = 3+6 = 9$

④ Bestimmen der auftragsorientierten Vorlaufzeiten F_{Aj} (Abb. 33).

A12 (1): $F_{Aj} = 1$ A12 wird auf M1 nach A11 eingeplant

A21 (3): $F_{Aj} = 1$ A31 wird auf M3 nach A11 eingeplant

A31 (2): $F_{Aj} = 0$

⑤ Berechnung der auftragsorientierten Nachlaufzeiten n_{Aj} .

Der von Auftrag 1 eingeplante Arbeitsgang A11 entfällt (Abb. 32).

Auftrag 1: $n_{A1} = \sum t_{jA1} = t(A12) + t(A13) = 2+9 = 11$

Auftrag 2: $n_{A2} = \sum t_{jA2} = t(A21) + t(A22) + t(A23) = 3+5+4 = 12$

Auftrag 3: $n_{A3} = \sum t_{jA3} = t(A31) + t(A32) + t(A33) = 8+7+6 = 21$

⑥ Bestimmen der Lower Bound LB (Zykluszeit):

$LB: = \max \{ F_{M1+n_{M1}}, F_{M2+n_{M2}}, F_{M3+n_{M3}} ; F_{A1+n_{A1}}, F_{A2+n_{A2}}, F_{A3+n_{A3}} \}$

$LB: = \max \{ 0+14, 0+21, 1+9 ; 1+11, 1+12, 0+21 \} = 21$

⑦ Bestimmen des frühesten Endzeitpunkts FE.

(Abb. 32 und ④)

A12 (1), $FE = 2+1$

A21 (3), $FE = 3+1$

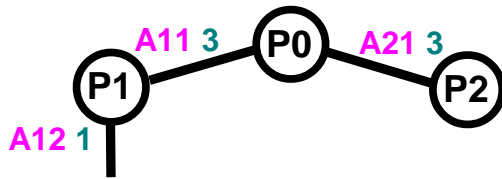
A31 (2), $FE = 8+0$

⑧ Einplanung aller Arbeitsgänge derjenigen Maschine, auf welcher sich der Arbeitsgang mit dem frühesten Endzeitpunkt befindet. Den frühesten Endzeitpunkt besitzt mit 3 Zeiteinheiten Arbeitsgang A12 auf Maschine 1.

$FE = \min \{3,4,8\} = 3$ auf Maschine $i=1$

\Rightarrow **A12 (1)** wird auf Maschine 1 eingeplant.

Teilproblem P1: $=\langle A11, A12 \rangle$. Wir betrachten erneut Teilproblem P1. Die Arbeitsgänge A11 und A12 sind eingeplant.



	Maschine 1			Maschine 2			Maschine 3		
Arbeitsgang	A12	A22	A32	A13	A23	A31	A11	A21	A33
Vorlaufzeit	1	3	8	3	8	0	0	0	15
Bearb. Zeit	2	5	7	9	4	8	1	3	6
Nachlaufzeit	9	4	6	0	0	13	11	9	0

Abb. 34

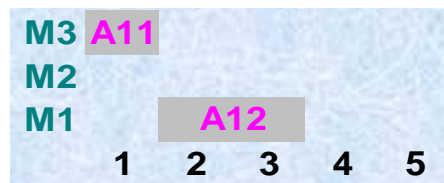


Abb. 35

❶ Arbeitsgang A12 wird durch A13 ersetzt. Wir betrachten A13 (auf Maschine 2), A21 (auf Maschine 3) und A31 (auf Maschine 2).

❷ **Maschinenorientierte Vorlaufzeiten F_{Mi}** (Abb. 35).

Maschine 1: $F_{M1} = \text{Vorlaufzeit A12} + \text{Bearbeitungszeit A12} = 1+2 = 3$

Maschine 2: $F_{M2} = 0$

Maschine 3: $F_{M3} = \text{Bearbeitungszeit A11} = 1$

❸ **Maschinenorientierte Nachlaufzeiten n_{Mi}** . Die bereits eingeplanten Arbeitsgänge A11 und A12 entfallen (Abb. 34).

Maschine 1: $n_{M1} = \sum t_{jM1} = t(A22) + t(A32) = 5+7 = 12$

Maschine 2: $n_{M2} = \sum t_{jM2} = t(A13) + t(A23) + t(A31) = 9+4+8 = 21$

Maschine 3: $n_{M3} = \sum t_{jM3} = t(A21) + t(A33) = 3+6 = 9$

❹ **Auftragsorientierte Vorlaufzeiten F_{Aj}** (Abb. 35).

A13 (2): $F_{Aj} = 3$ A13 wird auf M2 nach A12 eingeplant

A21 (3): $F_{Aj} = 1$ A21 wird auf M3 nach A11 eingeplant

A31 (2): $F_{Aj} = 0$

❺ **Auftragsorientierte Nachlaufzeiten n_{Aj}** . Die von Auftrag 1 eingeplanten Arbeitsgänge A11 und A12 entfallen (Abb. 34).

Auftrag 1: $n_{A1} = \sum t_{jA1} = t(A13) = 9$

Auftrag 2: $n_{A2} = \sum t_{jA2} = t(A21) + t(A22) + t(A23) = 3+5+4 = 12$

Auftrag 3: $n_{A3} = \sum t_{jA3} = t(A31) + t(A32) + t(A33) = 8+7+6 = 21$

❻ **Bestimmen der Lower Bound LB (Zykluszeit):**

LB: $= \max \{ F_{M1}+n_{M1}, F_{M2}+n_{M2}, F_{M3}+n_{M3} ; F_{A1}+n_{A1}, F_{A2}+n_{A2}, F_{A3}+n_{A3} \}$

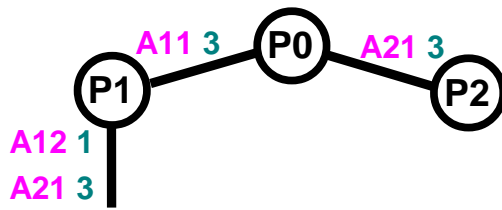
LB: $= \max \{ 3+12, 0+21, 1+9 ; 3+9, 1+12, 0+21 \} = 21$

❼ **Bestimmen des frühesten Endzeitpunkts FE** (Abb. 34 und ❹).

A13 (2) FE = 9+3, A21 (3) FE = 3+1, A31 (2) FE = 8+0

❽ FE = $\min \{12,4,8\} = 4$ auf Maschine $i=3 \Rightarrow$ A21 (3) wird eingeplant.

Teilproblem P1:=<A11, A12, A21].



Arbeitsgang	Maschine 1			Maschine 2			Maschine 3		
	A12	A22	A32	A13	A23	A31	A11	A21	A33
Vorlaufzeit	1	3	8	3	8	0	0	0	15
Bearb. Zeit	2	5	7	9	4	8	1	3	6
Nachlaufzeit	9	4	6	0	0	13	11	9	0

Abb. 36

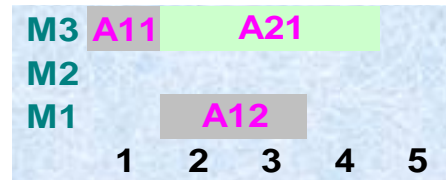


Abb. 37

❶ Arbeitsgang A21 wird durch A22 ersetzt. Wir betrachten A13 (Maschine 2), A22 (Maschine 1) und A31 (Maschine 2).

❷ **Maschinenorientierte Vorlaufzeiten F_{Mi}** (Abb. 37).

Maschine 1: $F_{M1} = \text{Vorlaufzeit A12} + \text{Bearbeitungszeit A12} = 1+2 = 3$

Maschine 2: $F_{M2} = 0$

Maschine 3: $F_{M3} = \text{Bearbeitungszeit A11} + \text{Bearbeitungszeit A21} = 1+3= 4$

❸ **Maschinenorientierte Nachlaufzeiten n_{Mi}** . Die bereits eingeplanten Arbeitsgänge A11, A12 und A21 entfallen (Abb. 36).

Maschine 1: $n_{M1} = \sum t_{jM1} = t(A22) + t(A32) = 5+7 = 12$

Maschine 2: $n_{M2} = \sum t_{jM2} = t(A13) + t(A23) + t(A31) = 9+4+8 = 21$

Maschine 3: $n_{M3} = \sum t_{jM3} = t(A33) = 6$

❹ **Auftragsorientierte Vorlaufzeiten F_{Aj}** (Abb. 37).

A13 (2): $F_{Aj} = 3$ A13 wird auf M2 nach A12 eingeplant

A22 (1): $F_{Aj} = 4$ A22 wird auf M1 nach A21 eingeplant

A31 (2): $F_{Aj} = 0$

❺ **Auftragsorientierte Nachlaufzeiten n_{Aj}** (Abb. 36).

Auftrag 1: $n_{A1} = \sum t_{jA1} = t(A13) = 9$

Auftrag 2: $n_{A2} = \sum t_{jA2} = t(A22) + t(A23) = 5+4 = 9$

Auftrag 3: $n_{A3} = \sum t_{jA3} = t(A31) + t(A32) + t(A33) = 8+7+6 = 21$

❻ **Bestimmen der Lower Bound LB (Zykluszeit):**

LB: = $\max \{ F_{M1}+n_{M1}, F_{M2}+n_{M2}, F_{M3}+n_{M3} ; F_{A1}+n_{A1}, F_{A2}+n_{A2}, F_{A3}+n_{A3} \}$

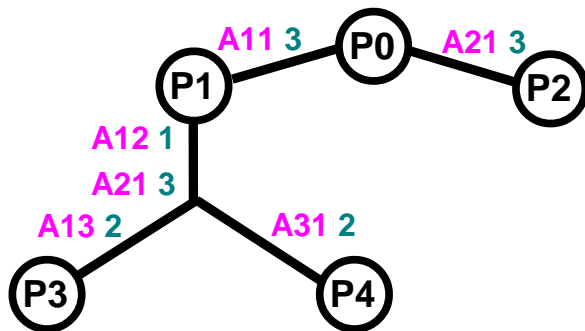
LB: = $\max \{ 3+12, 0+21, 4+6 ; 3+9, 4+9, 0+21 \} = 21$

❼ **Bestimmen des frühesten Endzeitpunkts FE** (Abb. 36 und ❹).

A13 (2) FE = 9+3, A22 (1) FE = 5+4, A31 (2) FE = 8+0

❽ FE = $\min \{12,9,8\} = 8$ auf Maschine $i=2 \Rightarrow$ A13 (2) und A31 (2) werden auf Maschine 2 eingeplant. Verzweigung in zwei Teilprobleme P3 bzw. P4

Teilproblem P4:=<A11, A12, A21, A31].



	Maschine 1			Maschine 2			Maschine 3		
Arbeitsgang	A12	A22	A32	A13	A23	A31	A11	A21	A33
Vorlaufzeit	1	3	8	3	8	0	0	0	15
Bearb. Zeit	2	5	7	9	4	8	1	3	6
Nachlaufzeit	9	4	6	0	0	13	11	9	0

Abb. 38

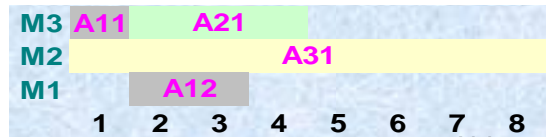


Abb. 39

❶ Arbeitsgang A31 wird durch den nachfolgenden Arbeitsgang A32 ersetzt. A13 (auf Maschine 2), A22 (auf Maschine 1), A32 (auf Maschine 1)

❷ Maschinenorientierte Vorlaufzeiten F_{Mi} (Abb. 39).

Maschine 1: $F_{M1} = 3$, Maschine 2: $F_{M2} = 8$, Maschine 3: $F_{M3} = 4$

❸ Maschinenorientierte Nachlaufzeiten n_{Mi} . Die bereits eingeplanten Arbeitsgänge A11, A12, A21 und A31 entfallen (Abb. 38).

Maschine 1: $n_{M1} = \sum t_{jM1} = t(A22) + t(A32) = 5+7 = 12$

Maschine 2: $n_{M2} = \sum t_{jM2} = t(A13) + t(A23) = 9+4 = 13$

Maschine 3: $n_{M3} = \sum t_{jM3} = t(A33) = 6$

❹ Auftragsorientierte Vorlaufzeiten F_{Aj} (Abb. 39).

A13 (2): $F_{Aj} = 8$ A13 wird auf M2 nach A31 eingeplant

A22 (1): $F_{Aj} = 4$ A22 wird auf M1 nach A21 eingeplant

A32 (1): $F_{Aj} = 8$ A32 wird auf M1 nach A31 eingeplant

❺ Auftragsorientierte Nachlaufzeiten n_{Aj} (Abb. 38).

Auftrag 1: $n_{A1} = \sum t_{jA1} = t(A13) = 9$

Auftrag 2: $n_{A2} = \sum t_{jA2} = t(A22) + t(A23) = 5+4 = 9$

Auftrag 3: $n_{A3} = \sum t_{jA3} = t(A32) + t(A33) = 7+6 = 13$

❻ Bestimmen der Lower Bound LB (Zykluszeit):

LB: = $\max \{ F_{M1}+n_{M1}, F_{M2}+n_{M2}, F_{M3}+n_{M3} ; F_{A1}+n_{A1}, F_{A2}+n_{A2}, F_{A3}+n_{A3} \}$

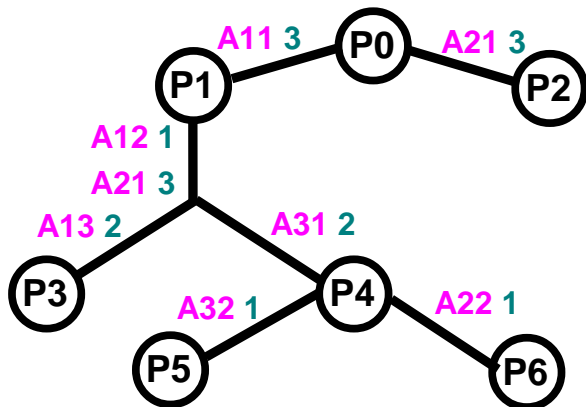
LB: = $\max \{ 3+12, 8+13, 4+6 ; 3+9, 4+9, 0+13 \} = 21$

❼ Bestimmen des frühesten Endzeitpunkts FE (Abb. 38 und ❹).

A13 (2) FE = 9+8, A22 (1) FE = 5+4, A32 (1) FE = 7+8

❽ FE = $\min \{17,9,15\} = 9$ auf Maschine $i=1 \Rightarrow$ A22 (1) und A32 (1) werden auf Maschine 1 eingeplant. Verzweigung in zwei Teilprobleme P5 bzw. P6.

Teilproblem P6: = <A11, A12, A21, A31, A22>.



	Maschine 1			Maschine 2			Maschine 3		
Arbeitsgang	A12	A22	A32	A13	A23	A31	A11	A21	A33
Vorlaufzeit	1	3	8	3	8	0	0	0	15
Bearb. Zeit	2	5	7	9	4	8	1	3	6
Nachlaufzeit	9	4	6	0	0	13	11	9	0

Abb. 40

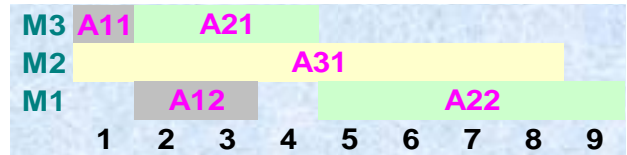


Abb. 41

① Arbeitsgang A22 wird durch Arbeitsgang A23 ersetzt.
 A13 (Maschine 2), A23 (Maschine 2) und A32 (Maschine 1) werden betrachtet.

② Maschinenorientierte Vorlaufzeiten F_{Mi} (Abb. 41).
 Maschine 1: $F_{M1} = 9$, Maschine 2: $F_{M2} = 8$, Maschine 3: $F_{M3} = 4$

③ Maschinenorientierte Nachlaufzeiten n_{Mi} (Abb. 40).
 Maschine 1: $n_{M1} = \sum t_{jM1} = t(A32) = 7$
 Maschine 2: $n_{M2} = \sum t_{jM2} = t(A13) + t(A23) = 9 + 4 = 13$
 Maschine 3: $n_{M3} = \sum t_{jM3} = t(A33) = 6$

④ Auftragsorientierte Vorlaufzeiten F_{Aj} (Abb. 41).
 A13 (2): $F_{Aj} = 8$ A13 wird auf M2 nach A31 eingeplant
 A23 (2): $F_{Aj} = 9$ A23 wird auf M2 nach A22 eingeplant
 A32 (1): $F_{Aj} = 9$ A32 wird auf M1 nach A22 eingeplant

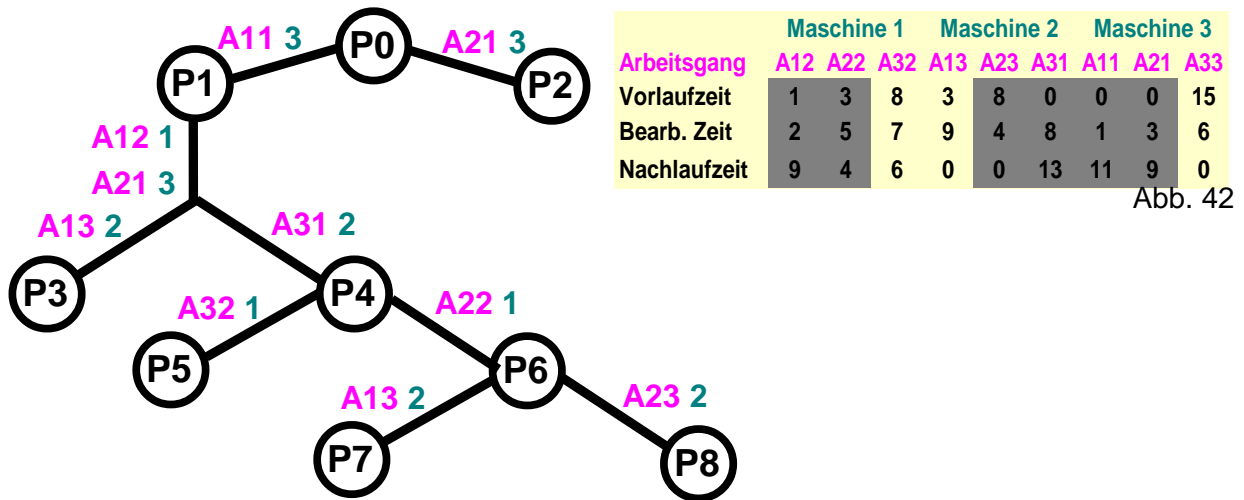
⑤ Auftragsorientierte Nachlaufzeiten n_{Aj} (Abb. 40).
 Auftrag 1: $n_{A1} = \sum t_{jA1} = t(A13) = 9$
 Auftrag 2: $n_{A2} = \sum t_{jA2} = t(A23) = 4$
 Auftrag 3: $n_{A3} = \sum t_{jA3} = t(A32) + t(A33) = 7 + 6 = 13$

⑥ Bestimmen der Lower Bound LB (Zykluszeit):
 $LB = \max \{ F_{M1} + n_{M1}, F_{M2} + n_{M2}, F_{M3} + n_{M3} ; F_{A1} + n_{A1}, F_{A2} + n_{A2}, F_{A3} + n_{A3} \}$
 $LB = \max \{ 9 + 7, 8 + 13, 4 + 6 ; 8 + 9, 9 + 4, 9 + 13 \} = 22$

⑦ Bestimmen des frühesten Endzeitpunkts FE (Abb. 40 und ④).
 A13 (2) FE = 9 + 8, A23 (2) FE = 4 + 9, A32 (1) FE = 7 + 9

⑧ FE = min {17, 13, 16} = 13 auf Maschine $i=2 \Rightarrow$ A13 (2) und A23 (2) werden auf Maschine 2 eingeplant. Da zwei Aufträge einzuplanen sind, entsteht eine Verzweigung in zwei Teilprobleme P7 bzw. P8.

Teilproblem P8:=<A11, A12, A21, A31, A22, A23].



	Maschine 1			Maschine 2			Maschine 3		
Arbeitsgang	A12	A22	A32	A13	A23	A31	A11	A21	A33
Vorlaufzeit	1	3	8	3	8	0	0	0	15
Bearb. Zeit	2	5	7	9	4	8	1	3	6
Nachlaufzeit	9	4	6	0	0	13	11	9	0

Abb. 42

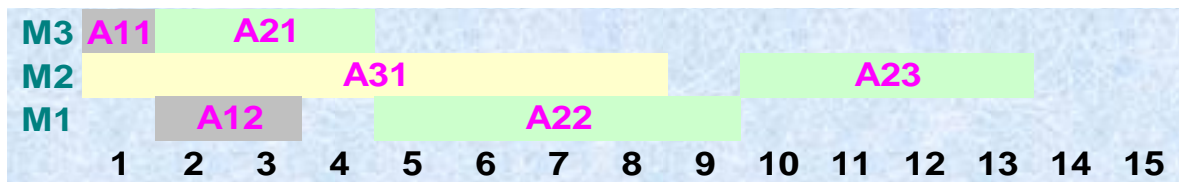


Abb. 43

❶ A23 ist der letzte Arbeitsgang von A2. Ein Ersetzen ist nicht möglich. A13 (auf Maschine 2) und A32 (auf Maschine 1) werden betrachtet.

❷ Maschinenorientierte Vorlaufzeiten F_{Mi} (Abb. 43).

Maschine 1: $F_{M1} = 9$, Maschine 2: $F_{M2} = 13$, Maschine 3: $F_{M3} = 4$

❸ Maschinenorientierte Nachlaufzeiten n_{Mi} (Abb. 42).

Maschine 1: $n_{M1} = \sum t_{jM1} = t(A32) = 7$

Maschine 2: $n_{M2} = \sum t_{jM2} = t(A13) = 9$

Maschine 3: $n_{M3} = \sum t_{jM3} = t(A33) = 6$

❹ Auftragsorientierte Vorlaufzeiten F_{Aj} (Abb. 43).

A13 (2): $F_{Aj} = 13$ A13 wird auf M2 nach A23 eingeplant, A2 fehlt

A32 (1): $F_{Aj} = 9$ A32 wird auf M1 nach A22 eingeplant

❺ Auftragsorientierte Nachlaufzeiten n_{Aj} (Abb. 42).

Auftrag 1: $n_{A1} = \sum t_{jA1} = t(A13) = 9$, Auftrag 2 fehlt

Auftrag 3: $n_{A3} = \sum t_{jA3} = t(A32) + t(A33) = 7+6 = 13$

❻ Bestimmen der Lower Bound LB (Zykluszeit):

LB: = $\max \{ F_{M1}+n_{M1}, F_{M2}+n_{M2}, F_{M3}+n_{M3} ; F_{A1}+n_{A1}, F_{A2}+n_{A2}, F_{A3}+n_{A3} \}$

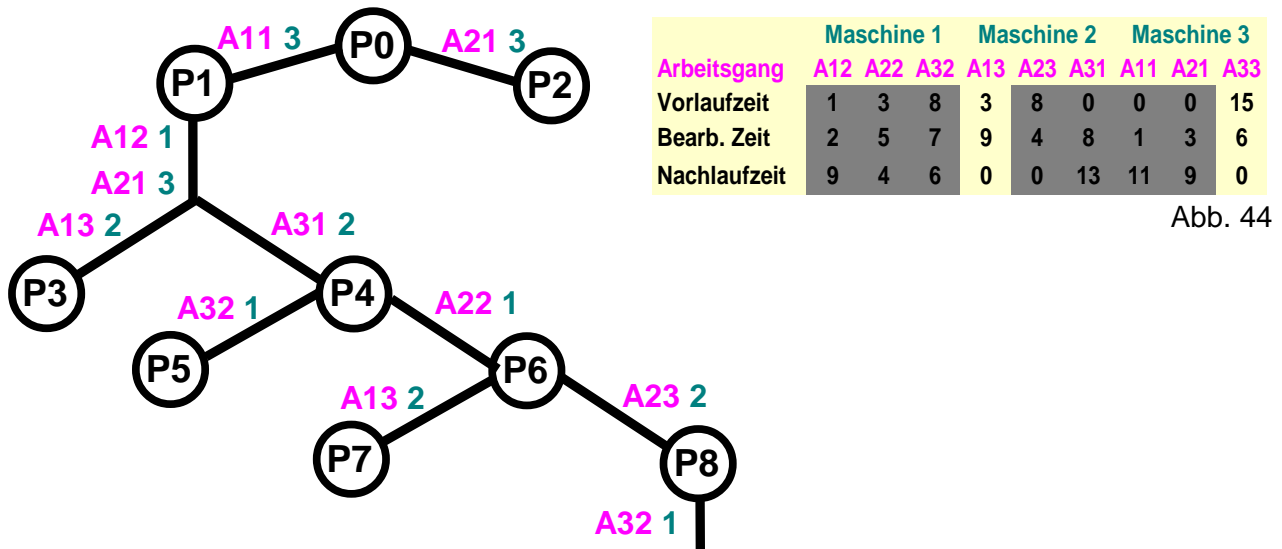
LB: = $\max \{ 9+7, 13+9, 4+6 ; 13+9, 0+0, 9+13 \} = 22$

❼ Bestimmen des frühesten Endzeitpunkts FE (Abb. 42 und ❹).

A13 (2) FE = 9+13, A2, A32 (1) FE = 7+9

❽ FE = $\min \{21, -, 16\} = 16$ auf Maschine $i=1 \Rightarrow$ A32 (1) wird eingeplant.

Teilproblem P8:=<A11, A12, A21, A31, A22, A23, A32].



	Maschine 1			Maschine 2			Maschine 3		
Arbeitsgang	A12	A22	A32	A13	A23	A31	A11	A21	A33
Vorlaufzeit	1	3	8	3	8	0	0	0	15
Bearb. Zeit	2	5	7	9	4	8	1	3	6
Nachlaufzeit	9	4	6	0	0	13	11	9	0

Abb. 44

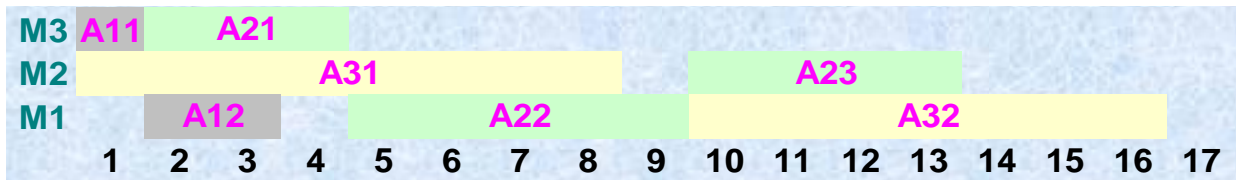


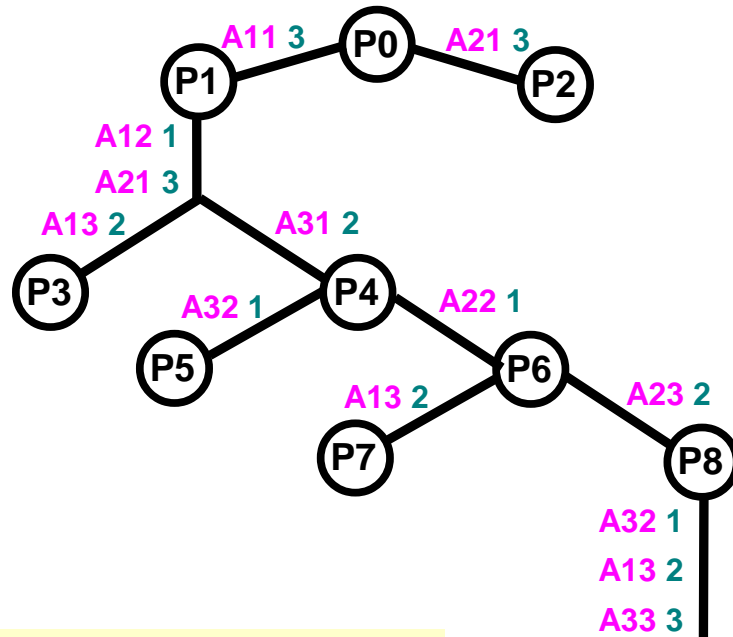
Abb. 45

- ❶ Auswahl der einplanbaren Arbeitsgänge. A32 wird durch A33 ersetzt.
A13 (Maschine 2), A33 (Maschine 3)
- ❷ Maschinenorientierte Vorlaufzeiten F_{Mi} (Abb. 45).
Maschine 1: $F_{M1} = 16$, Maschine 2: $F_{M2} = 13$, Maschine 3: $F_{M3} = 4$
- ❸ Maschinenorientierte Nachlaufzeiten n_{Mi} (Abb. 44).
Maschine 1: $n_{M1} = \sum t_{jM1} = 0$, Maschine 2: $n_{M2} = \sum t_{jM2} = t(A13) = 9$
Maschine 3: $n_{M3} = \sum t_{jM3} = t(A33) = 6$
- ❹ Auftragsorientierte Vorlaufzeiten F_{Aj} (Abb. 45).
A13 (2): $F_{Aj} = 13$, A13 nach A23, A2 fehlt, A33 (3): $F_{Aj} = 16$, A33 nach A32
- ❺ Auftragsorientierte Nachlaufzeiten n_{Aj} (Abb. 44).
Auftrag 1: $n_{A1} = \sum t_{jA1} = t(A13) = 9$, A2 fehlt, Auftrag 3: $n_{A3} = \sum t_{jA3} = t(A33) = 6$
- ❻ Bestimmen der Lower Bound LB (Zykluszeit):
LB: = $\max \{ F_{M1} + n_{M1}, F_{M2} + n_{M2}, F_{M3} + n_{M3} ; F_{A1} + n_{A1}, F_{A2} + n_{A2}, F_{A3} + n_{A3} \}$
LB: = $\max \{ 16 + 0, 13 + 9, 4 + 6 ; 13 + 9, 0 + 0, 16 + 6 \} = 22$
- ❼ Bestimmen des frühesten Endzeitpunkts FE (Abb.44 und ❹).
A13 (2) FE = $9 + 13$, A2, A33 (3) FE = $6 + 16$
- ❽ Frühester Endzeitpunkt, FE = $\min \{ 22, -, 22 \} = 22 \Rightarrow$ keine Präferenzen.

Zulässige Lösung von Teilproblem P8:

=<A11, A12, A21, A31, A22, A23, A32, A13, A33].

Nach Einplanen von A13 und A33 ergibt sich eine Lösung mit Zykluszeit LB=22:



	Maschine 1	Maschine 2	Maschine 3
Arbeitsgang	A12	A22	A32
Vorlaufzeit	1	3	8
Bearb. Zeit	2	5	7
Nachlaufzeit	9	4	6
	A13	A23	A31
	A11	A21	A33
	8	0	0
	0	1	3
	6	9	0

Abb. 46

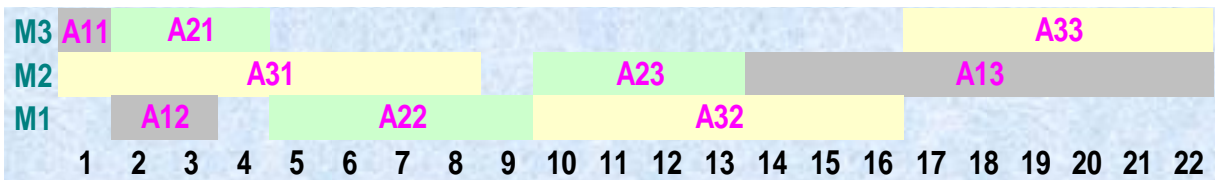


Abb. 47

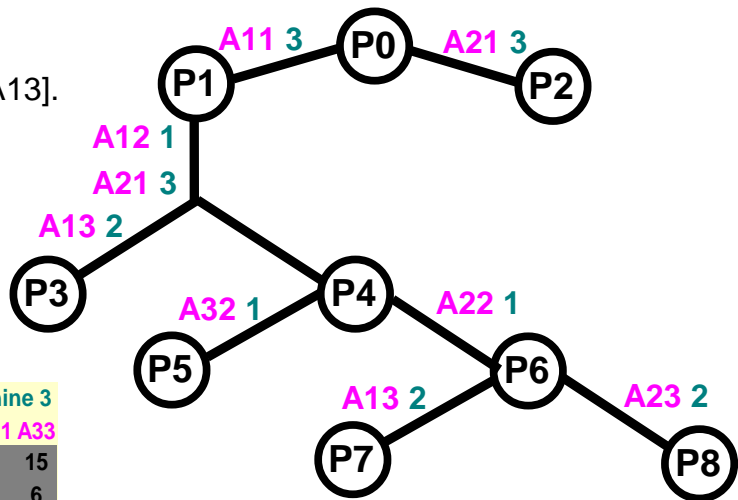
Alle Arbeitsgänge der drei Aufträge sind eingeplant (siehe Abb. 46). Ein entsprechendes Gantt- Diagramm ist in Abbildung 47 dargestellt.

Ergebnis für Teilproblem P8:

Die Zykluszeit beträgt 22 Zeiteinheiten. Nun werden die zuvor abgebrochenen Teilprobleme P7, P5, P3 und P3 weiterverfolgt. Diese Überprüfung endet, wenn entweder ebenfalls alle Aufträge eingeplant sind, oder die Untergrenze der Zykluszeit (Lower Bound LB), die von P8 vorgegebene Lösung von 22 Zeiteinheiten überschreitet. Im letzteren Fall ist dieses Teilproblem hinsichtlich der Zielsetzung "Minimierung der Zykluszeit" als suboptimale Lösung zu verwerfen.

Teilproblem P7:

=<A11, A12, A21, A31, A22, A13].



	Maschine 1	Maschine 2	Maschine 3	
Arbeitsgang	A12	A22	A32	A13
	A23	A31	A11	A21
	A33			
Vorlaufzeit	1	3	8	3
	8	0	0	0
	0	0	0	15
Bearb. Zeit	2	5	7	9
	4	8	1	3
	6			
Nachlaufzeit	9	4	6	0
	0	13	11	9
	0			0

Abb. 48

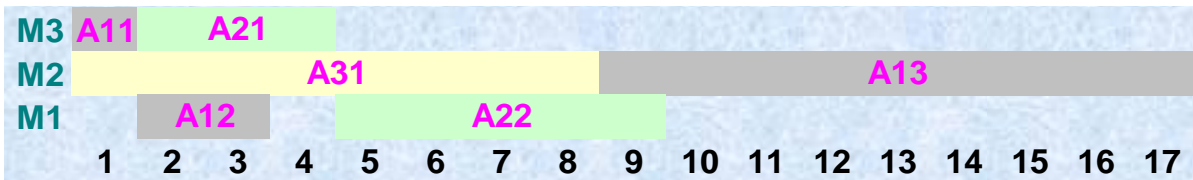


Abb. 49

❶ Wir betrachten A23 (auf Maschine 2) und A32 (auf Maschine 1).

❷ Maschinenorientierte Vorlaufzeiten F_{Mi} (Abb. 49).

Maschine 1: $F_{M1} = 9$, Maschine 2: $F_{M2} = 17$, Maschine 3: $F_{M3} = 4$

❸ Maschinenorientierte Nachlaufzeiten n_{Mi} (Abb. 48).

Maschine 1: $n_{M1} = \sum t_{jM1} = t(A32) = 7$

Maschine 2: $n_{M2} = \sum t_{jM2} = t(A23) = 4$

Maschine 3: $n_{M3} = \sum t_{jM3} = t(A33) = 6$

❹ Auftragsorientierte Vorlaufzeiten F_{Aj} (Abb. 49).

A23 (2): $F_{Aj} = 17$ A23 wird auf M2 nach A13 eingeplant

A32 (1): $F_{Aj} = 9$ A32 wird auf M1 nach A22 eingeplant

❺ Auftragsorientierte Nachlaufzeiten n_{Aj} (Abb. 48).

Auftrag 2: $n_{A1} = \sum t_{jA1} = t(A23) = 4$

Auftrag 3: $n_{A3} = \sum t_{jA3} = t(A32) + t(A33) = 7+6 = 13$

❻ Bestimmen der Lower Bound LB (Zykluszeit):

LB: = $\max \{ F_{M1}+n_{M1}, F_{M2}+n_{M2}, F_{M3}+n_{M3} ; F_{A1}+n_{A1}, F_{A2}+n_{A2}, F_{A3}+n_{A3} \}$

LB: = $\max \{ 9+7, 17+4, 4+6 ; 0+0, 17+4, 9+13 \} = 22$

❼ Bestimmen des frühesten Endzeitpunkts FE (Abb. 48 und ❹).

A23 (2) FE = 4+17, A32 (1) FE = 7+9

❽ FE = $\min \{-, 21, 16\} = 16$ auf Maschine $i=1 \Rightarrow$ A32 (1) wird eingeplant.

Da die übrigen Arbeitsgänge (A23 und A33) alle auf unterschiedlichen Maschinen bearbeitet werden, können wir beide gleich mit einplanen.

Die Lösung besitzt eine Zykluszeit von 22 Zeiteinheiten (Abbildung 51).

Zulässige Lösung von Teilproblem P7:

=<A11, A12, A21, A31, A22, A13, A32, A23, A33>.

	Maschine 1			Maschine 2			Maschine 3		
Arbeitsgang	A12	A22	A32	A13	A23	A31	A11	A21	A33
Vorlaufzeit	1	3	8	3	8	0	0	0	15
Bearb. Zeit	2	5	7	9	4	8	1	3	6
Nachlaufzeit	9	4	6	0	0	13	11	9	0

Abb. 50

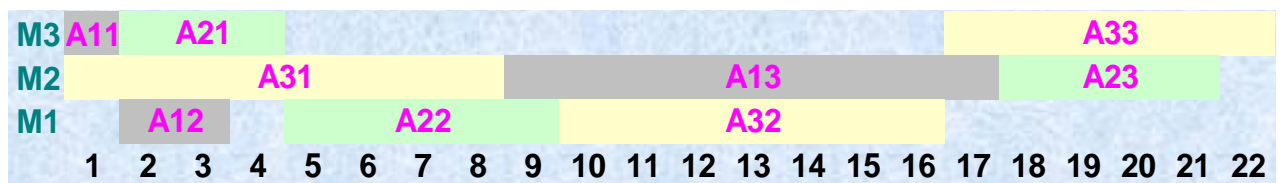
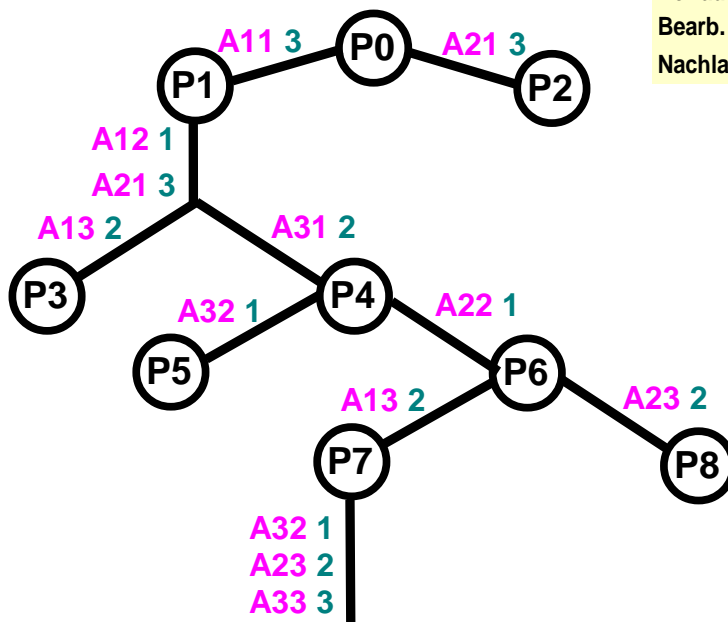
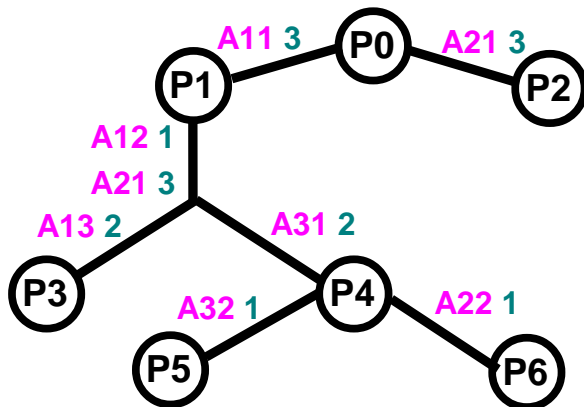


Abb. 51

Ergebnis für Teilproblem P7:

Die Lösung von Teilproblem P7 besitzt mit 22 Zeiteinheiten dieselbe Zykluszeit wie Teilproblem P8 (siehe Seite 34). Beide Lösungen sind hinsichtlich der Zielsetzung "Minimierung der Zykluszeit" gleichwertig.

Teilproblem P5: = <A11, A12, A21, A31, A32].



	Maschine 1			Maschine 2			Maschine 3		
Arbeitsgang	A12	A22	A32	A13	A23	A31	A11	A21	A33
Vorlaufzeit	1	3	8	3	8	0	0	0	15
Bearb. Zeit	2	5	7	9	4	8	1	3	6
Nachlaufzeit	9	4	6	0	0	13	11	9	0

Abb. 52

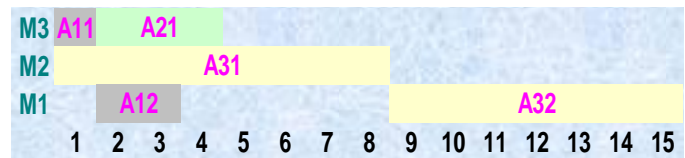


Abb. 53

❶ Wir betrachten A13 (Maschine 2), A22 (Maschine 1) und A33 (Maschine 3).

❷ Maschinenorientierte Vorlaufzeiten F_{Mi} (Abb. 53).

Maschine 1: $F_{M1} = 15$, Maschine 2: $F_{M2} = 8$, Maschine 3: $F_{M3} = 4$

❸ Maschinenorientierte Nachlaufzeiten n_{Mi} (Abb. 52).

Maschine 1: $n_{M1} = \sum t_{jM1} = t(A22) = 5$

Maschine 2: $n_{M2} = \sum t_{jM2} = t(A13) + t(A23) = 9+4 = 13$

Maschine 3: $n_{M3} = \sum t_{jM3} = t(A33) = 6$

❹ Auftragsorientierte Vorlaufzeiten F_{Aj} (Abb. 53).

A13 (2): $F_{Aj} = 8$ A13 wird auf M2 nach A31 eingeplant

A22 (1): $F_{Aj} = 15$ A22 wird auf M1 nach A32 eingeplant

A33 (3): $F_{Aj} = 15$ A33 wird auf M3 nach A32 eingeplant

❺ Auftragsorientierte Nachlaufzeiten n_{Aj} (Abb. 52).

Auftrag 1: $n_{A1} = \sum t_{jA1} = t(A13) = 9$,

Auftrag 2: $n_{A2} = \sum t_{jA2} = t(A22) + t(A23) = 5+4 = 9$

Auftrag 3: $n_{A3} = \sum t_{jA3} = t(A33) = 6$

❻ Bestimmen der Lower Bound LB (Zykluszeit):

LB: = $\max \{ F_{M1}+n_{M1}, F_{M2}+n_{M2}, F_{M3}+n_{M3} ; F_{A1}+n_{A1}, F_{A2}+n_{A2}, F_{A3}+n_{A3} \}$

LB: = $\max \{ 15+5, 8+13, 4+6 ; 8+9, 15+9, 15+6 \} = 24$

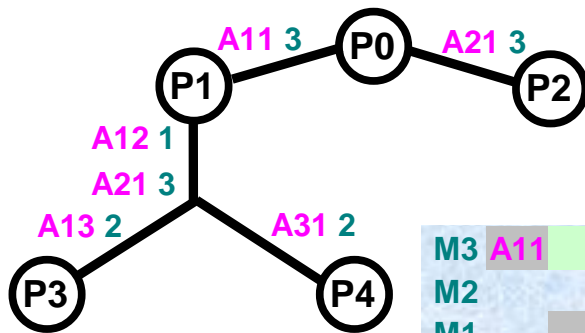
❼ Bestimmen des frühesten Endzeitpunkts FE (Abb. 52 und ❹).

A13 (2) FE = 9+8, A22 (1) FE = 5+9, A33 (3) FE = 6+6

❽ FE = $\min \{17,14,12\} = 12$ auf Maschine $i=3 \Rightarrow$ A33 (3) wird eingeplant.

Ergebnis für Teilproblem P5: Die Zykluszeit ist mit 24 Zeiteinheiten größer als die Zykluszeit von Teilproblem P8 (Zykluszeit = 22 ZE, siehe Seite 34). Dies ist in den zwei letzten Arbeitsgängen des Auftrags 2 begründet. Diese haben in der Summe eine Bearbeitungszeit von 9 Zeiteinheiten (siehe ❺). Da A22 auf M1 erst nach 15 Zeiteinheiten (hinter A32) beginnen kann (siehe ❹ und Abb 53), wird Auftrag 2 frühestens nach 24 Zeiteinheiten fertiggestellt.

Teilproblem P3:=<A11, A12, A21, A13].



	Maschine 1			Maschine 2			Maschine 3		
Arbeitsgang	A12	A22	A32	A13	A23	A31	A11	A21	A33
Vorlaufzeit	1	3	8	3	8	0	0	0	15
Bearb. Zeit	2	5	7	9	4	8	1	3	6
Nachlaufzeit	9	4	6	0	0	13	11	9	0

Abb. 54

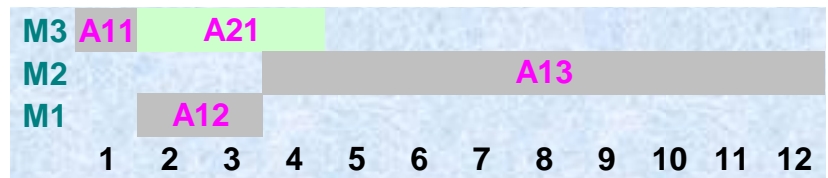


Abb. 55

❶ Wir betrachten A22 (auf Maschine 1) und A31 (auf Maschine 2).

❷ Maschinenorientierte Vorlaufzeiten F_{Mi} (Abb. 55).

Maschine 1: $F_{M1} = 3$, Maschine 2: $F_{M2} = 12$, Maschine 3: $F_{M3} = 4$

❸ Maschinenorientierte Nachlaufzeiten n_{Mi} (Abb. 54).

Maschine 1: $n_{M1} = \sum t_{jM1} = t(A22) + t(A32) = 5+7 = 12$

Maschine 2: $n_{M2} = \sum t_{jM2} = t(A23) + t(A31) = 4+8 = 12$

Maschine 3: $n_{M3} = \sum t_{jM3} = t(A33) = 6$

❹ Auftragsorientierte Vorlaufzeiten F_{Aj} (Abb. 55).

A22 (1): $F_{Aj} = 4$ A22 wird auf M1 nach A21 eingeplant

A31 (2): $F_{Aj} = 12$ A31 wird auf M2 nach A13 eingeplant

❺ Auftragsorientierte Nachlaufzeiten n_{Aj} (Abb. 54).

Auftrag 2: $n_{A2} = \sum t_{jA2} = t(A22) + t(A23) = 5+4 = 9$

Auftrag 3: $n_{A3} = \sum t_{jA3} = t(A31) + t(A32) + t(A33) = 8+7+6 = 21$

❻ Bestimmen der Lower Bound LB (Zykluszeit):

LB: = $\max \{ F_{M1}+n_{M1}, F_{M2}+n_{M2}, F_{M3}+n_{M3} ; F_{A1}+n_{A1}, F_{A2}+n_{A2}, F_{A3}+n_{A3} \}$

LB: = $\max \{ 3+12, 12+12, 4+6 ; 0+0, 4+9, 12+21 \} = 33$

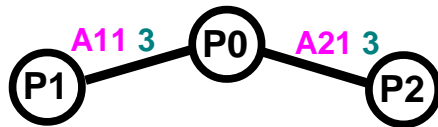
❼ Bestimmen des frühesten Endzeitpunkts FE (Abb. 54 und ❹).

A22 (1) FE = 5+4, A31 (2) FE = 8+12

❽ FE = $\min \{-, 9, 20\} = 9$ auf Maschine $i=1 \Rightarrow$ A22 (1) wird auf M1 eingeplant.

Ergebnis für Teilproblem P3: Die Zykluszeit (LB) ist mit 33 Zeiteinheiten größer als die von Teilproblem P8 (LB=22 ZE, siehe Seite 34). Dies ist in den letzten drei Arbeitsgängen des Auftrags 3 begründet. Diese haben in der Summe eine Bearbeitungszeit von 21 Zeiteinheiten (siehe ❺). Da A31 auf M2 erst nach 12 Zeiteinheiten (hinter A13) beginnen kann (siehe ❹ und Abb. 55), wird Auftrag 3 frühestens nach 33 Zeiteinheiten fertiggestellt.

Teilproblem P2:=<A21]. Wir betrachten Teilproblem P2. Arbeitsgang A21 ist eingeplant.



	Maschine 1			Maschine 2			Maschine 3		
Arbeitsgang	A12	A22	A32	A13	A23	A31	A11	A21	A33
Vorlaufzeit	1	3	8	3	8	0	0	0	15
Bearb. Zeit	2	5	7	9	4	8	1	3	6
Nachlaufzeit	9	4	6	0	0	13	11	9	0

Abb. 56

M3	A21				
M2					
M1					
	1	2	3	4	5

Abb. 57

❶ Wir betrachten

A11 (auf Maschine 3), A22 (auf Maschine 1) und A31 (auf Maschine 2).

❷ **Maschinenorientierte Vorlaufzeiten F_{Mi}** (Abb. 57).

Maschine 1: $F_{M1} = 0$, Maschine 2: $F_{M2} = 0$, Maschine 3: $F_{M3} = 3$

❸ **Maschinenorientierte Nachlaufzeiten n_{Mi}** (Abb. 56).

Maschine 1: $n_{M1} = \sum t_{jM1} = t(A12) + t(A22) + t(A32) = 2+5+7 = 14$

Maschine 2: $n_{M2} = \sum t_{jM2} = t(A13) + t(A23) + t(A31) = 9+4+8 = 21$

Maschine 3: $n_{M3} = \sum t_{jM3} = t(A11) + t(A33) = 1+6 = 7$

❹ **Auftragsorientierte Vorlaufzeiten F_{Aj}** (Abb. 57).

A11 (3): $F_{Aj} = 3$ A11 wird auf M3 nach A21 eingeplant

A22 (1): $F_{Aj} = 3$ A22 wird auf M1 nach A21 eingeplant

A31 (2): $F_{Aj} = 0$

❺ **Auftragsorientierte Nachlaufzeiten n_{Aj}** (Abb. 56).

Auftrag 1: $n_{A1} = \sum t_{jA1} = t(A11) + t(A12) + t(A13) = 1+2+9 = 12$

Auftrag 2: $n_{A2} = \sum t_{jA2} = t(A22) + t(A23) = 5+4 = 9$

Auftrag 3: $n_{A3} = \sum t_{jA3} = t(A31) + t(A32) + t(A33) = 8+7+6 = 21$

❻ **Bestimmen der Lower Bound LB** (Zykluszeit):

LB: = $\max \{ F_{M1}+n_{M1}, F_{M2}+n_{M2}, F_{M3}+n_{M3} ; F_{A1}+n_{A1}, F_{A2}+n_{A2}, F_{A3}+n_{A3} \}$

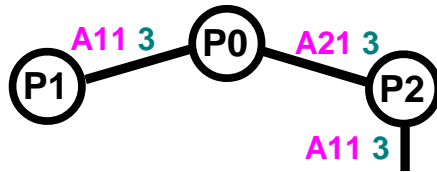
LB: = $\max \{ 0+14, 0+21, 3+7 ; 3+12, 3+9, 0+21 \} = 21$

❼ **Bestimmen des frühesten Endzeitpunkts FE** (Abb. 56 und ❹).

A11 (3) FE = 1+3, A22 (1) FE = 5+3, A31 (2) FE = 8+0

❽ FE = $\min \{ 4, 8, 8 \} = 4$ auf Maschine $i=3 \Rightarrow$ A11 (3) wird eingeplant.

Teilproblem P2:=<A21, A11].



	Maschine 1			Maschine 2			Maschine 3		
Arbeitsgang	A12	A22	A32	A13	A23	A31	A11	A21	A33
Vorlaufzeit	1	3	8	3	8	0	0	0	15
Bearb. Zeit	2	5	7	9	4	8	1	3	6
Nachlaufzeit	9	4	6	0	0	13	11	9	0

Abb. 58

M3	A21			A11	
M2					
M1					
	1	2	3	4	5

Abb. 59

❶ A12 (auf Maschine 1), A22 (auf Maschine 1), A31 (auf Maschine 2)

❷ Maschinenorientierte Vorlaufzeiten F_{Mi} (Abb. 59).

Maschine 1: $F_{M1} = 0$, Maschine 2: $F_{M2} = 0$, Maschine 3: $F_{M3} = 4$

❸ Maschinenorientierte Nachlaufzeiten n_{Mi} (Abb. 58).

Maschine 1: $n_{M1} = \sum t_{jM1} = t(A12) + t(A22) + t(A32) = 2+5+7 = 14$

Maschine 2: $n_{M2} = \sum t_{jM2} = t(A13) + t(A23) + t(A31) = 9+4+8 = 21$

Maschine 3: $n_{M3} = \sum t_{jM3} = t(A33) = 6$

❹ Auftragsorientierte Vorlaufzeiten F_{Aj} (Abb. 59).

A12 (1): $F_{Aj} = 4$ A12 wird auf M1 nach A11 eingeplant

A22 (1): $F_{Aj} = 3$ A22 wird auf M1 nach A21 eingeplant

A31 (2): $F_{Aj} = 0$

❺ Auftragsorientierte Nachlaufzeiten n_{Aj} (Abb. 58).

Auftrag 1: $n_{A1} = \sum t_{jA1} = t(A12) + t(A13) = 2+9 = 11$

Auftrag 2: $n_{A2} = \sum t_{jA2} = t(A22) + t(A23) = 5+4 = 9$

Auftrag 3: $n_{A3} = \sum t_{jA3} = t(A31) + t(A32) + t(A33) = 8+7+6 = 21$

❻ Bestimmen der Lower Bound LB (Zykluszeit):

LB: = $\max \{ F_{M1}+n_{M1}, F_{M2}+n_{M2}, F_{M3}+n_{M3} ; F_{A1}+n_{A1}, F_{A2}+n_{A2}, F_{A3}+n_{A3} \}$

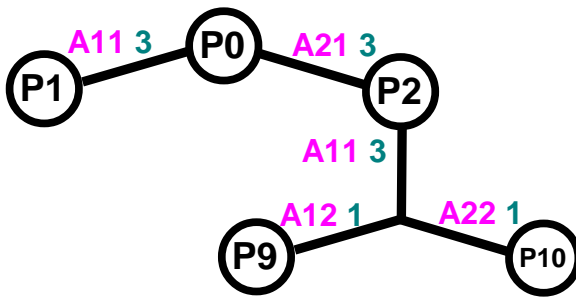
LB: = $\max \{ 0+14, 0+21, 4+6 ; 4+11, 3+9, 0+21 \} = 21$

❼ Bestimmen des frühesten Endzeitpunkts FE (Abb. 58 und ❹).

A12 (1) FE = 2+4, A22 (1) FE = 5+3, A31 (2) FE = 8+0

❽ FE = $\min \{6,8,8\} = 6$ auf Maschine $i=1 \Rightarrow$ A12 (1) und A22 (1) werden eingeplant. Verzweigung in zwei Teilprobleme P9 und P10.

Teilproblem P9: = <A21, A11, A12].



	Maschine 1			Maschine 2			Maschine 3		
Arbeitsgang	A12	A22	A32	A13	A23	A31	A11	A21	A33
Vorlaufzeit	1	3	8	3	8	0	0	0	15
Bearb. Zeit	2	5	7	9	4	8	1	3	6
Nachlaufzeit	9	4	6	0	0	13	11	9	0

Abb. 60



Abb. 61

❶ A13 (auf Maschine 2), A22 (auf Maschine 1), A31 (auf Maschine 2)

❷ Maschinenorientierte Vorlaufzeiten F_{Mi} (Abb. 61).

Maschine 1: $F_{M1} = 6$, Maschine 2: $F_{M2} = 0$, Maschine 3: $F_{M3} = 4$

❸ Maschinenorientierte Nachlaufzeiten n_{Mi} (Abb. 60).

Maschine 1: $n_{M1} = \sum t_{jM1} = t(A22) + t(A32) = 5 + 7 = 12$

Maschine 2: $n_{M2} = \sum t_{jM2} = t(A13) + t(A23) + t(A31) = 9 + 4 + 8 = 21$

Maschine 3: $n_{M3} = \sum t_{jM3} = t(A33) = 6$

❹ Auftragsorientierte Vorlaufzeiten F_{Aj} (Abb. 61).

A13 (2): $F_{Aj} = 6$ A13 wird auf M2 nach A12 eingeplant

A22 (1): $F_{Aj} = 6$ A22 wird auf M1 nach A12 eingeplant

A31 (2): $F_{Aj} = 0$

❺ Auftragsorientierte Nachlaufzeiten n_{Aj} (Abb. 60).

Auftrag 1: $n_{A1} = \sum t_{jA1} = t(A13) = 9$

Auftrag 2: $n_{A2} = \sum t_{jA2} = t(A22) + t(A23) = 5 + 4 = 9$

Auftrag 3: $n_{A3} = \sum t_{jA3} = t(A31) + t(A32) + t(A33) = 8 + 7 + 6 = 21$

❻ Bestimmen der Lower Bound LB (Zykluszeit):

LB: = $\max \{ F_{M1} + n_{M1}, F_{M2} + n_{M2}, F_{M3} + n_{M3}; F_{A1} + n_{A1}, F_{A2} + n_{A2}, F_{A3} + n_{A3} \}$

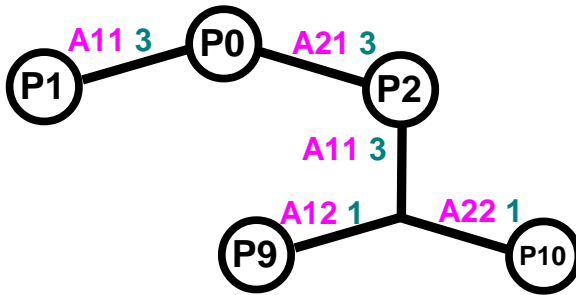
LB: = $\max \{ 6 + 12, 0 + 21, 4 + 6; 6 + 9, 6 + 9, 0 + 21 \} = 21$

❼ Bestimmen des frühesten Endzeitpunkts FE (Abb. 60 und ❹).

A13 (2) FE = 9 + 6, A22 (1) FE = 5 + 6, A31 (2) FE = 8 + 0

❽ FE = $\min \{ 15, 11, 8 \} = 8$ auf Maschine $i=2 \Rightarrow$ A13 (2) und A31 (2) werden eingeplant. Verzweigung in zwei Teilprobleme P11 und P12.

Teilproblem P10:=<A21, A11, A22].



	Maschine 1		Maschine 2			Maschine 3			
Arbeitsgang	A12	A22	A32	A13	A23	A31	A11	A21	A33
Vorlaufzeit	1	3	8	3	8	0	0	0	15
Bearb. Zeit	2	5	7	9	4	8	1	3	6
Nachlaufzeit	9	4	6	0	0	13	11	9	0

Abb. 62

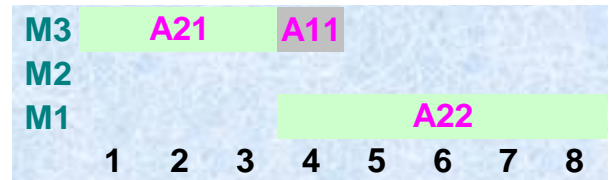


Abb. 63

① A12 (auf Maschine 1), A23 (auf Maschine 2), A31 (auf Maschine 2)

② Maschinenorientierte Vorlaufzeiten F_{Mi} (Abb. 63).

Maschine 1: $F_{M1} = 8$, Maschine 2: $F_{M2} = 0$, Maschine 3: $F_{M3} = 4$

③ Maschinenorientierte Nachlaufzeiten n_{Mi} (Abb. 62).

Maschine 1: $n_{M1} = \sum t_{jM1} = t(A12) + t(A32) = 2+7 = 9$

Maschine 2: $n_{M2} = \sum t_{jM2} = t(A13) + t(A23) + t(A31) = 9+4+8 = 21$

Maschine 3: $n_{M3} = \sum t_{jM3} = t(A33) = 6$

④ Auftragsorientierte Vorlaufzeiten F_{Aj} (Abb. 63).

A12 (1): $F_{Aj} = 8$ A12 wird auf M1 nach A22 eingeplant

A23 (2): $F_{Aj} = 8$ A23 wird auf M2 nach A22 eingeplant

A31 (2): $F_{Aj} = 0$

⑤ Auftragsorientierte Nachlaufzeiten n_{Aj} (Abb. 62).

Auftrag 1: $n_{A1} = \sum t_{jA1} = t(A12) + t(A13) = 2+9 = 11$

Auftrag 2: $n_{A2} = \sum t_{jA2} = t(A23) = 4$

Auftrag 3: $n_{A3} = \sum t_{jA3} = t(A31) + t(A32) + t(A33) = 8+7+6 = 21$

⑥ Bestimmen der Lower Bound LB (Zykluszeit):

LB: = max { $F_{M1}+n_{M1}$, $F_{M2}+n_{M2}$, $F_{M3}+n_{M3}$; $F_{A1}+n_{A1}$, $F_{A2}+n_{A2}$, $F_{A3}+n_{A3}$ }

LB: = max { 8+9, 0+21, 4+6 ; 8+11, 8+4, 0+21 } = 21

⑦ Bestimmen des frühesten Endzeitpunkts FE (Abb. 62 und ④).

A12 (1) FE = 2+8, A23 (2) FE = 4+8, A31 (2) FE = 8+0

⑧ FE = min {10,12,8} = 6 auf Maschine i=2 \Rightarrow A23 (2) und A31 (2) werden eingeplant. Verzweigung in zwei Teilprobleme P13 und P14.

Die extreme Verzweigung von Teilproblem 2 in sechs neue Teilprobleme P9, P10, P11, P12, P13 und P14 führt zu einem starken Anstieg der Komplexität. Eine vollständige Betrachtung, der weiterführenden Teilproblemen würde den Rahmen dieses Referats sprengen. Wir begnügen uns mit den vollständigen Lösungen der Teilprobleme P7 und P8.

Ergebnis der unvollständigen Lösung des Branch & Bound Verfahrens: Die beiden Teilprobleme P8 (Seite 35) und P7 (Seite 37) stellen mit einer Zykluszeit von 22 Zeiteinheiten die vorläufig Beste Lösung des Problems dar.

2.7 Abschließende Beurteilung

Die in diesem Referat vorgestellten Verfahren können schnell und exakt zur Lösung von einfach gehaltenen Maschinenbelegungsproblemen dienen.

Für kleinere Betriebe mit häufiger Produktionsumstellung sind die Heuristiken zu speziell gehalten. Hier werden die einfacheren Prioritätsregeln zur Steuerung bevorzugt.

Eine größere Bedeutung kommt den Heuristiken bei der Fließbandfertigung zu. Hier werden die aufwendigen Berechnungen durch Kosteneinsparungen aufgrund besserer Maschinenauslastung gerechtfertigt.

Der Anhang enthält eine zusammenfassende Darstellung der Lösung des Branch & Bound Beispiels.

Literaturverzeichnis

- Adams, Colins C.: Das Knotenbuch, Spektrum Verlag, Heidelberg 1995
- Bornstein, Claudio Thomas: Das Problem der Minimierung von Wartezeiten und Verspätungskosten bei der Maschinenbelegungsplanung
Dissertation 1975
- Corsten: Produktionswirtschaft, R. Oldenbourg Verlag München Wien 1995
- Diestel, R.: Graphentheorie, Spinger Verlag, Berlin Heidelberg 1996
- Halin, Rudolf: Graphentheorie, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1989
- Hoss, Klaus: Fertigungsablaufplanung mittels operationsanalytischer Methoden, Physica- Verlag, Würzburg Wien 1965
- Kim, Bong-Sung: Industrielle Ablaufplanungsprobleme und heuristische Verfahren zu ihrer Lösung, Dissertation 1987
- Kahle, Egbert: Produktion, R. Oldenbourg Verlag, München 1980
- Kopfer H., Bierwirth C., Mattfeld D., Utecht T.: Genetische Algorithmen und das Problem der Maschinenbelegung, Fachbericht Nr. 3 1993
- Lebefrom, Uwe: Produktion, Oldenbourg Verlag, München 1989
- Sägesser, Roland: Analytische und heuristische Methoden zur Lösung des Reihenfolgeproblems mit besonderer Berücksichtigung der Werkstattfertigung Druck Sommertype AG, Zumikon 1976
- Siegel, Theodor: Das Reihenfolgeproblem der Maschinenbelegungsplanung und ein graphischer Branch-and-Bound-Algorithmus zu seiner Lösung, Erich Schmidt Verlag, Berlin 1973
- Siegel, Theodor: Optimale Maschinenbelegungsplanung
Erich Schmidt Verlag, Berlin 1974
- Stahlknecht, Peter: Operations Research,
Friedr. Vieweg + Sohn, Braunschweig 1970
- Steven, Marion: Hierarchische Produktionsplanung, Physica-Verlag, Heidelberg 1994
- Tempelmeier H., Günther H.: Produktion und Logistik
Springer- Verlag, Berlin Heidelberg 1997
- Turau, Volker: Algorithmische Graphentheorie, Addison-Wesley, Bonn 1996
- Wunderlich, Frank-Gerhard: Ein Dekompositionsverfahren zur Bestimmung optimaler Reihenfolgen bei Maschinenbelegungsproblemen der Werkstattfertigung, Inaugural-Dissertation 1977

3 Aufträge: **A1** Balken
A2 Bretter
A3 Rundholz

3 Maschinen: **M1** Sägen
M2 Hobeln
M3 Lackieren

A11	Balken sägen	M1	1 ZE
A12	Balken hobeln	M2	2 ZE
A13	Balken lackieren	M3	9 ZE
A21	Bretter sägen	M1	3 ZE
A22	Bretter hobeln	M2	5 ZE
A23	Bretter lackieren	M3	4 ZE
A31	Rundholz sägen	M1	8 ZE
A32	Rundholz hobeln	M2	7 ZE
A33	Rundholz lackieren	M3	6 ZE

Bearbeitungszeiten t_{ji}		Maschinen i			
		1	2	3	4
Aufträge j	1	4	1	2	4
	2	2	3	3	1

